Теория относительности и гравитация

Доктор физ.-мат. наук
Профессор кафедры физики высоких энергий
и элементарных частиц

Владимир Дмитриевич Ляховский

Развернутый план лекций

Текст развернутого плана ни в коей мере не является конспектом курса лекций. Он представляет собой сводку результатов, служит путеводителем и позволяет лучше понять структуру изложенного материала.

Часть *I*

Литература:

- В.А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения (первые пять глав), Физматгиз, Москва, 1961.
- К.Мёллер, Теория относительности, Атомиздат, 1975.
- Ч.Мизнер, К. Торн, Д. Уилер "Гравитация", т.т. I,II,III, Мир, 1977.
- П.К. Рашевский "Риманова геометрия и тензорный анализ", Наука, 1967.
- Ш. Кобаяси, К. Номидзу "Основы дифференциальной геометрии", т.т. I,II, Наука, 1981.

Принципы специальной теории относительности.

1. Пространство-время суть 4-мерное линейное пространство, существующее независимо от наблюдателя.

2. Существуют ИСО, в каждой ИСО существует инерциальный репер.

3. Во всякой ИСО наблюдения над скоростью света в вакууме дают один и тот же результат: свет движется прямолинейно с постоянной скоростью c, являющейся мировой константой. Нет физических объектов, которые распространялмсь бы со скоростью больше скорости света.

4. Все ИСО физически эквивалентны. Нет привилегированной ИСО. Нет эксперимента, позволяющего обнаружить "абсолютное" движение или покой. Никакой результат наблюдения не зависит от положения наблюдателя или его скорости относительно других наблюдателей, если они не взаимодействуют с объектом. Два идентичных экземпляра механической системы в двух ИСО будут развиваться ("двигаться") одинаково.

О ковариантности. Ковариантность проще всего формулировать как возможность описывать состояние и развитие системы в терминах, не связанных с конкретной системой отсчета. В этом смысле ковариантность есть следствие принципа относительности.

0.1 Преобразования, связывающие ИСО.

1. Необходимо описать преобразования, позволяющие пересчитать результаты наблюдений, осуществленных из разных ИСО. Для характеристик системы (эксперимента), которые наблюдаются, эти преобразования становятся *преобразованиями симметрии*.

   В данный момент наша модель пространства-времени – плоское псевдоевклидово пространство с метрикой (1,3). То есть существуют ортонормированные координаты, в которых метрическая форма диагональна и имеет вид

   $$\mathbf{g} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{1}$$

2. Что такое группа?

   Определение 1 *Группа суть множество (многообразие) G со свойствами*

   (a) на G задан бинарный закон композиции,

   (b) ассоциативный,

(c) с левой единицей и левым обратным.

Упражнение 1 *Покажите, что из существования левых единицы и обратного элемента следует существование правых единицы и обратного. Более того, левая единица совпадает с правой, левый обратный совпадает с правым.*

Нам будут необходимы простейшие сведения о типах групп:

- конечные,
- бесконечные дискретные,
- непрерывные, которые в силу групповых свойств являются аналитическими.

Будем также использовать понятие *подгруппы* – подмножества H в G, замкнутого относительно всех операций:

$$H \subset G \tag{2}$$

$$h_i \in H \tag{3}$$

$$h_j h_i \in H \tag{4}$$

$$h_j^{-1} \in H \tag{5}$$

$$e \in H \tag{6}$$

3. В непрерывных группах важную роль играют однопараметрические подгруппы $g(t)$, т.е. гладкие кривые со свойствами

$$g(t_1)g(t_2) = g(t_1 + t_2),$$

и их генераторы a;

$$\frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = a.$$

1 Структура группы преобразований, связывающих ИСО

Искомая группа $\mathbf{\Pi}$ (группа Пуанкаре) содержит по крайней мере две подгруппы:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^{i\prime} = \Lambda^{(3)}{}_k^{\ i} x^k + a^i \\ ct' = ct + b \end{array} ; \right\},$$

$$x'^0 = x^0 + b^0.$$

Оператор Λ:

$$x'^\mu = f^\mu\left(\{x^\nu\}\right)$$

переводит уравнение прямолинейного равномерного движения в аналогичное уравнение в новых координатах:

$$\alpha^i_\mu x^\mu + \beta^i = 0 \Longrightarrow \alpha'^i_\mu x'^\mu + \beta'^i = 0. \tag{7}$$

Теорема 1 *Оператор Λ есть оператор дробно-линейного преобразования вида*

$$x'^{\mu} = \frac{a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + b^{\mu}}{c_{\nu} x^{\nu} + d},$$

$a^{\mu}_{\nu}, b^{\mu}, c_{\nu}, d$ **параметры из R**

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{a^{\mu}_{\nu}} & b^{\mu} \\ c_{\nu} & d \end{pmatrix} \neq 0$$

Замечание 1 *Оператор Λ представляет собой пятимерную матрицу.*

Искомая группа содержит подгруппу трансляций:

$$T^{(4)} \subset \mathbf{\Pi},$$

Она четырехмерна, аналитична и ее пространство эквивалентно

$$\mathcal{R}^4.$$

Кроме того $\mathbf{\Pi}$ содержит подгруппу $\mathbf{\Lambda}$ линейных однородных четырехмерных (невырожденных) преобразований

$$\mathbf{\Lambda} \subset \mathbf{\Pi}, \quad \{ \quad a \in \mathbf{\Lambda} \quad | \quad \det a \neq 0 \quad \},$$

сохраняющих <u>*интервал*</u>

$$x^{\mu} x_{\mu} = x^{\mu} x^{\nu} \eta_{\mu\nu}, \tag{8}$$

$$\text{где} \qquad \eta = diag\{1 -1 -1 -1\}. \tag{9}$$

Т.е. матрицы Λ удовлетворяют условию

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta; \tag{10}$$

Следствие 1

$$\det \Lambda = \pm 1;$$

Определение 2 *Группа линейных однородных преобразований в $\mathbf{R}^4$, сохраняющих интервал $x^{\mu} x_{\mu}$ (билинейную форму с матрицей η) называется <u>общей группой Лоренца</u>,*

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{O}(3,1) \tag{11}$$

Мы будем постоянно пользоваться следующими обозначениями:

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh\alpha$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\alpha$$

Так что

$$\gamma \cdot \beta = \sinh\alpha$$

Замечание 2 *Общая группа Лоренца имеет подгруппу* $\mathbf{O}(3)$ *– подгруппу (трехмерных) вращений . Подгруппа* $\mathbf{O}(3)$ *содержит отражения.*

2 Орбиты группы Лоренца в пространстве Минковского

В группе Лоренца присутствуют псевдоортогональные преобразования, или *бусты*.

Определение 3 *Множество* $\mathrm{Orb}(G)$ *точек пространства* N*, связанных преобразованиями группы* G*, называется орбитой группы* G *в пространстве* N

$$n_1, n_2 \in N; \quad g \in G$$

$$g \circ n_1 = n_2.$$

Орбита группы Лоренца в пространстве M^4 соответствует фиксированному значению инварианта, уравнение орбиты группы Лоренца:

$$s^2 = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 = const.$$

Любые две точки орбиты можно совместить выполнив последовательно буст (гиперболическое преобразование) и вращение. Действительно,

1. выберем в качестве начальной точки полюс (что не умаляет общности рассмотрения),
2. построим сечение орбиты плоскостью $x^0 = \mathrm{const}$, проходящей через вторую точку; очевидно,что это сфера S^2, (то же видно и на рисунке)
3. выполним буст, переводящий полюс в точку на сфере,
4. Произведем вращение, совмещающее две точки на сфере.

3 Размерность Λ и свойства связности

Преобразования Лоренца псевдоортогональны, следовательно в соответствующей 4x4-матрице имеется шесть независимых матричных элементов.

Утверждение 1 *Группа Лоренца шестимерна.*

Замечание 3 *Размерность – локальное понятие, оно не зависит от наличия дискретных преобразований (и связности пространства группы).*

Утверждение 2 *Несобственные псевдоортогональные преобразования имеют свойство*

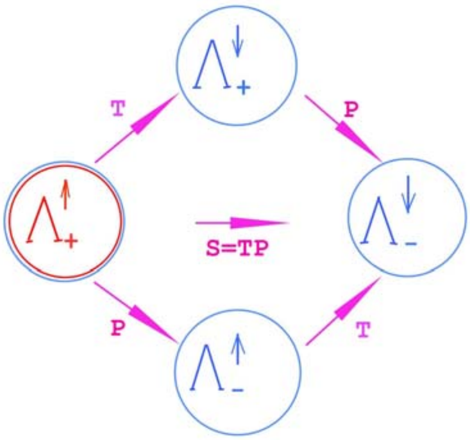
$$\det \Lambda = -1; \tag{12}$$

они не образуют группу. В общей группе Лоренца можно выделить дискретную подгруппу отражений которая состоит из 4-х элементов:

1. *отражения времени T,*
2. *пространственного отражения P,*
3. *полного отражения S,*
4. *единицы e.*

Причем

$$T \cdot P = S;$$
$$T^2 = P^2 = S^2 = e;$$



Утверждение 3 *Общая группа Лоренца содержит 4 <u>связных компоненты</u>:*

1. собственная ортохронная группа $\mathbf{\Lambda}_{+}^{\uparrow}$,

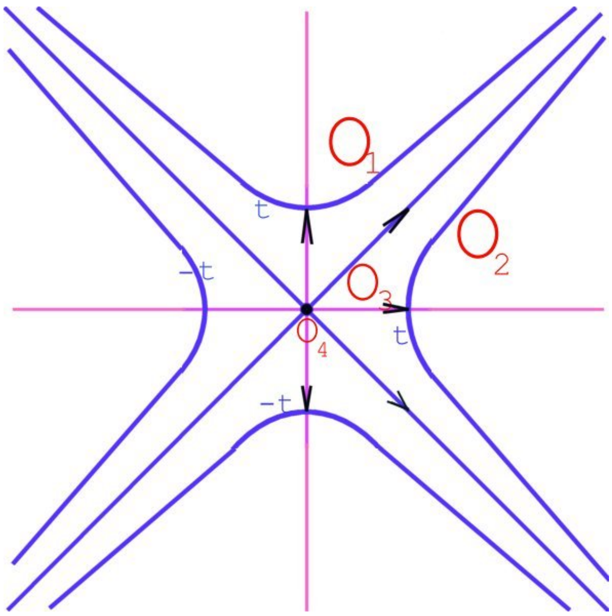
2. собственные ахронные преобразования $\mathbf{\Lambda}_{+}^{\downarrow}$,

3. несобственные ортохронные преобразования $\mathbf{\Lambda}_{-}^{\uparrow}$,

4. несобственные ахронные преобразования $\mathbf{\Lambda}_{-}^{\downarrow}$.

Замечание 4 *Поскольку общая группа Лоренца содержит дискретные преобразования (отражения), то орбиты ее на* M^4 *могут быть несвязными. Из связных компонент лишь собственные ортохронные преобразования образуют группу.*

Легко показать, что на M^4 мы имеем 5 поверхностей транзитивности, соответствующих 4-м орбитам:



1. верхняя пола гиперболоида со стандартным вектором

$$(t, 0, 0, 0) \qquad t > 0; \qquad s^2 > 0,$$

   и нижняя пола гиперболоида со стандартным вектором

$$(-t, 0, 0, 0) \qquad t > 0 \qquad s^2 > 0,$$

2. однополостный гиперболоид со стандартным вектором

$$(0, 0, 0, t) \qquad t > 0 \qquad s^2 < 0,$$

3. световой конус со стандартным вектором

$$(t,0,0,t) \qquad t>0 \qquad s^2=0,$$

4. нулевой вектор

$$(0,0,0,0)\,,$$

3.1 Группа Пуанкаре

Преобразования:

$$x_2^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu}_{(1)}+a^{\mu}; \tag{13}$$

полностью определяются заданием оператора Λ и вектора трансляции $\mathbf{a}$,

$$\pi=(t_{\mathbf{a}},\Lambda\,(\varphi,\vartheta,\psi,\alpha,\chi,\eta))=(\mathbf{a},\Lambda)\,;$$

Последовательность преобразований

$$\pi_2\pi_1=(\mathbf{a_2},\Lambda_2)\,(\mathbf{a_1},\Lambda_1)\,;$$

вновь записывается в виде пары

$$\pi_3=\pi_2\pi_1=(\mathbf{a_3},\Lambda_3)\,;$$

$$\pi_2\pi_1=(\mathbf{a}_2,\Lambda_2)\,(\mathbf{a}_1,\Lambda_1)=\Big(\mathbf{a}_2+\boxed{\Lambda_2\circ\mathbf{a}_1},\Lambda_2\Lambda_1\Big)\,;$$

где "$\circ$" означает действие Λ (как матрицы) на вектор $\mathbf{a}$.

Определение 4 *Такая форма умножения элементов подгрупп в группе называется полупрямым произведением.*

Утверждение 4 *Группа Пуанкаре есть полупрямое произведение подгрупп Лоренца и трансляций,*

$$\mathbf{\Pi}=\mathbf{\Lambda}\oslash T^4;$$

Ее топологическое пространство – прямая сумма пространств подгрупп Лоренца и трансляций. Пространство группы T^4 – евклидово пространство R^4.

Следствие 2 *Общая группа Пуанкаре содержит 4 <u>связных компоненты</u>:*

1. *собственная ортохронная группа* $\mathbf{\Pi}_+^{\uparrow}=\mathbf{\Lambda}_+^{\uparrow}\oslash T^4$,

2. *собственные ахронные преобразования* $\mathbf{\Pi}_+^{\downarrow}=\mathbf{\Lambda}_+^{\downarrow}\oslash T^4$,

3. *несобственные ортохронные преобразования* $\mathbf{\Pi}_-^{\uparrow}=\mathbf{\Lambda}_-^{\uparrow}\oslash T^4$,

4. *несобственные ахронные преобразования* $\mathbf{\Pi}_-^{\downarrow}=\mathbf{\Lambda}_-^{\downarrow}\oslash T^4$.

4 Гладкие многообразия

Определение 5 *Многообразием называется топологическое пространство, которое можно покрыть открытыми областями, каждая из которых (топологически) эквивалентна области в $\mathbf{R}^n$ и координаты в смежных областях связаны гладкими функциями.*

Размерность многообразия

$$\dim \mathcal{M} = n.$$

5 Линейные (векторные) пространства и пространства функционалов

Определение 6 *Множество V, которое является абелевой группой по сложению (с "0" в качестве выделенного элемента) и свойствами умножения на числа из $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$*

1′) $r \cdot (v_1 + v_2) = r \cdot v_1 + r \cdot v_2;$

2′) $(r_1 + r_2) \cdot v = r_1 \cdot v + r_2 \cdot v;$

3′) $r_1 \cdot (r_2 \cdot v) = (r_1 r_2) \cdot v;$

1′) $1 \cdot v = v;$

называется векторным пространством.

Определение 7 *Базисом S называется полная линейно независимая система векторов*

$$S = \{e_i\}$$

в векторном пространстве.

Определение 8 *Любые два базиса имеют равную мощность, она называется размерностью векторного пространства.*

$$\dim V = n.$$

Определение 9 *Векторным пространством V^* дуальным к V называется пространство линейных функционалов f на V.*

$$V^* = \mathrm{Hom}_K\,(V, K)$$

$$f \in V^*.$$

Размерность дуального пространства совпадает с размерностью V:

$$\dim V^* = \dim V.$$

В дуальном пространстве можно построить базис, канонически дуальный к S.

$$S^* = \{(e_i)^*\} = \{e^{*i}\};$$

Дуальные пространства, V и V^*, можно рассматривать как два векторных пространства с канонической билинейной невырожденной *формой*

$$\langle\rangle : (V^*, V) \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Паре элементов, $v^* \in V^*$ и $w \in V$, можно сопоставить свертку

$$\langle v^*, w\rangle = k \in K$$

$$v^*(w) = k$$

Если на V задан оператор

$$Av = v',$$

то на пространстве V^* можно построить *дуальный оператор*, потребовав

$$\langle f'v'\rangle = \langle fv\rangle .$$

$$\langle f'Av\rangle = \left\langle fA^{-1}Av\right\rangle = \langle fv\rangle$$

В дуальном преобразовании

$$f' = fA^{-1}$$

действие правое. Удобнее записать его как левое действие:

$$\widetilde{f}' = \left(\left(A^T\right)^{-1} \cdot \widetilde{f}\right)$$

Тогда оператору A в пространстве V соответствует $\left(A^T\right)^{-1}$ в V^*.

Для конечномерного пространства V можно показать, что

$$V^{**} \approx V.$$

5.1 Подпространства. Прямая сумма пространств. Факторпространства. Гомоморфизмы.

Определение 10 *Если для любой пары $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ линейная оболочка (множество всех $r^1v_1 + r^2v_2$) составляет пространство V, причем $V_1 \cap V_2 = 0$, то V есть прямая сумма V_1 и V_2.*

$$V = V_1 \oplus V_2; \qquad V_i \subset V; \qquad V_1 \cap V_2 = 0; \tag{14}$$

Прямые слагаемые являются подпространствами в $V_1 \oplus V_2$. Всякое подпространство V_1 в V определяет V_2 такое, что $V = V_1 \oplus V_2$.

Определение 11 *Факторпространством*

$$V/V_1 \approx V_2 \tag{15}$$

называется множество классов абелевой группы в V по подгруппе в V_1.

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2; \tag{16}$$

Определение 12 *Гомоморфизмом A векторных пространств*

$$A \in \mathrm{Hom}\,(V_1, V_2) \tag{17}$$

называется отображение, коммутирующее с умножением на числа и с операцией сложения векторов.

Гомоморфизмы можно представлять себе как операторы $Ax_{(1)} = x_{(2)}$. В компонентах

$$A_i^k x_{(1)}^i = x_{(2)}^k. \tag{18}$$

5.2 Тензорное произведение пространств.

Пусть K – поле вещественных или комплексных чисел. Рассмотрим векторные пространства V_1 и V_2, их элементы $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ и абелеву группу (V_1, V_2), порожденную парами (v_1, v_2) и операцией сложения $(v_1, v_2)+(v_1', v_2')$. Построим подгруппу D элементов вида

1. $(v_1 + v_1', v_2) - (v_1, v_2) - (v_1', v_2)\,,$
2. $(v_1, (v_2 + v_2')) - (v_1, v_2) - (v_1', v_2)\,,$
3. $(v_1 r, v_2) = (v_1, r v_2) = r\,(v_1, v_2)\,;$
   $r \in \mathbf{K}$.

Определение 13 *Факторгруппа*

$$(V_1, V_2)\,/D$$

называется тензорным произведением пространств V_1 и V_2.

$$V_1 \otimes V_2 \equiv (V_1, V_2)\,/D \tag{19}$$

Существует возможность построить тензорное произведение пространства V на себя любое число раз (n-ой тензорной степени),

$$T^n \equiv V \otimes V \otimes \ldots \otimes V. \tag{20}$$

Можно построить прямые суммы тензорных степеней, и в частности

$$\oplus_{i=0}^{\infty} T^i\,(V)\,. \tag{21}$$

Нулевая тензорная степень

$$T^0(V) \equiv K \tag{22}$$

имеет очевидные свойства по отношению к операции тензорного произведения:

$$K \otimes V \approx V, \tag{23}$$
$$V \otimes K \approx V. \tag{24}$$

$T^0(V)$ суть <u>*скаляры*</u>.

Одновременное рассмотрение векторных пространств и дуальных к ним приводит к тензорам смешанного типа:

$$V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k \otimes V_1^* \otimes ... \otimes V_l^* \tag{25}$$

Определение 14 *<u>Сверткой</u> называется билинейное отображение*

$$V_s \otimes V_t \xrightarrow{\langle\rangle} \underline{V_s \otimes V_t} \in K \tag{26}$$

Ранг тензора уменьшается на 2.

Определение 15 *Пространство*

$$T \equiv \oplus_{i,j=0}^{\infty} T^{\overset{i}{j}}(V)$$

с операцией тензорного произведения и единицей (полем K) называется <u>тензорной алгеброй</u>

Тензорное произведение некоммутативно, в общем случае

$$V_1 \otimes V_2 \neq V_2 \otimes V_1,$$

Утверждение 5 *Пусть $S_1 = \{e_{1i}\}$ и $S_2 = \{e_{2i}\}$ – базисы в V_1 и V_2. Тогда тензорные произведения*

$$e_{1i} \otimes e_{2i},$$

образуют базис в пространстве $V_1 \otimes V_2$,

<u>*Симметричная билинейная невырожденная форма*</u>

$$\langle\rangle : V \otimes V \longrightarrow K$$

в пространстве V называется <u>*метрической*</u>. Её значение на паре векторов $\langle v_1, v_2 \rangle = k(v_1, v_2)$ можно рассматривать как <u>*скалярное произведение*</u>.

5.3 Важный пример.

Рассмотрим пространство Минковского M^4 и матрицу метрической формы $\eta_{\mu\nu}$ в нем. В стандартном базисе матрица формы η имеет вид

$$\eta = \mathrm{diag}\,(1 -1 -1 -1) \tag{27}$$

так что скалярное произведение двух векторов имеет вид

$$\langle v_1, v_2\rangle = v_1^i v_2^j \eta_{ij} = v_1^0 v_2^0 - v_1^1 v_2^1 - v_1^2 v_2^2 - v_1^3 v_2^3 = (v_1, v_2) \tag{28}$$

Наличие скалярного произведения позволяет, в свою очередь, однозначно сопоставить всякому $v \in V$ элемент пространства V^*, равный

$$\langle v, \quad \rangle$$

Тем самым устанавливается изоморфизм

$$V \approx V^*$$

Построение метрической формы эквивалентно заданию <u>*метрического тензора*</u> валентности $\overset{0}{2}$, т.е. симметричного элемента тензорной алгебры $T^{\overset{0}{2}}$. Поскольку его компоненты суть η_{ij}, то сам он (в стандартном базисе) имеет вид

$$g = \eta_{kl} e^k \otimes e^l$$

6 Преобразования в тензорной алгебре

Утверждение 6 *Всякое линейное преобразование*

$$D : V \longrightarrow V$$

с матричными элементами

$$\left(e^i, De_j\right) = D^i_j$$

такими, что

$$\left(v'\right)^i = D^i_j v^j$$

$$e'_j = D^i_j e_i$$

индуцирует в дуальном пространстве преобразование

$$D^* : V^* \longrightarrow V^*$$

со свойствами

$$\left(w'\right)_i = D^{*j}_i w_j$$

$$\left(e'^i\right) = D^{*i}_j e^j$$

Матрицы этих преобразований связаны соотношением

$$D^{*i}_{j} = D^{-1i}_{j} \tag{29}$$

Свертка является инвариантом тензорного произведения этих преобразований:

$$w\,(v) = w_i v^i \longrightarrow D^{*j}_{i} w_j D^i_k v^k = D^{-1j}_{i} D^i_k w_j v^k = w_k v^k = \mathrm{inv}.$$

6.1 Действие группы Лоренца на пространстве Минковского.

Преобразования Λ группы Лоренца в определяющем представлении подчинены условию

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{30}$$

Свертка бивектора с матрицей метрического тензора есть инвариант:

$$x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu. \tag{31}$$

Метрический тензор можно рассматривать как отображение

$$\eta : V \longrightarrow V^* \tag{32}$$

Преобразование Λ на пространстве V индуцирует на дуальном пространстве V^* преобразование, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Lambda} & V \\ \eta\downarrow & & \downarrow\eta \\ V^* & \xrightarrow{\Lambda^*} & V^* \end{array} \tag{33}$$

где

$$\Lambda^* = \Lambda^{-1}. \tag{34}$$

Если отождествить пространство V^* с V, то дуальный оператор имеет вид

$$\Lambda^{-1T}.$$

6.2 Симметризация и антисимметризация

Операция перестановки тензорных сомножителей:

$$\tau_{kl} : V_k \otimes V_l \longrightarrow V_l \otimes V_k. \tag{35}$$

Определение 16 *Тензор называется* <u>симметричным</u> *по* $\{V_k, V_l\}$*, если*

$$\tau_{kl} T = T. \tag{36}$$

Тензор называется <u>антисимметричным</u> *по* $\{V_k, V_l\}$*, если*

$$\tau_{kl} T = -T. \tag{37}$$

Зададим процедуры:
симметризации

$$S\circ = \frac{1}{n!}\sum_{P(1,\ldots,n)} \circ \tag{38}$$

и антисимметризации

$$\Lambda\circ = \frac{1}{n!}\sum_{P(1,\ldots,n)} (\mathrm{sign}P)\circ \tag{39}$$

Для тензора ранга 2 имеем,

$$T = S\,(T) + \Lambda\,(T) \tag{40}$$

Для тензора ранга 3:

$$T^{\left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]} = T^{\square\square\square} + T^{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} + T^{\begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{3}&\end{smallmatrix}} + T^{\begin{smallmatrix}\boxed{1}&\boxed{3}\\\boxed{2}&\end{smallmatrix}} \tag{41}$$

Те же преобразования можно произвести и с тензорами $T^{\left[\begin{smallmatrix}n\\0\end{smallmatrix}\right]}$, $T^{\left[\begin{smallmatrix}0\\n\end{smallmatrix}\right]}$ произвольной степени n.

Определение 17 *Результат действия Λ на $T^{\left[\begin{smallmatrix}0\\p\end{smallmatrix}\right]}$ называется пространством внешних p-форм.*

Определение 18 *Операция Λ называется внешним произведением.*

Определение 19 *Алгебра на пространстве $\oplus_{p=0}^{n}\left(\Lambda\circ T^{\left[\begin{smallmatrix}0\\p\end{smallmatrix}\right]}\right)$ с умножением Λ называется внешней алгеброй или алгеброй Грассмана (ее размерность равна 2^n).*

Элементы $\oplus_{p=0}^{n}\left(\Lambda\circ T^{\left[\begin{smallmatrix}0\\p\end{smallmatrix}\right]}\right)$ называются внешними формами или просто формами.

7 Свойства свертки

1. Свертка с формой ω "вырезает" в тензоре T антисимметричную часть.
2. При рассмотрении сужения форм на алгебру подпространств, $V \supset W$,

$$\omega_{|W} = \omega\left(v_{1|w} v_{2|w} ... v_{n|w}\right) \tag{42}$$

имеем следующие результаты:

$$\dim W < n \quad \Longrightarrow \quad \omega_{|W} = 0 \tag{43}$$

$$\dim W = n \quad \Longrightarrow \quad \omega_{|W} \quad \text{одномерно} \tag{44}$$

8 Ориентируемость и параллелизуемость

Выберем $\widetilde{\omega} \neq 0$, которая позволит разделить множество всех реперов (или базисов) на два класса

1.
$$\widetilde{\omega}\left(e_1 \otimes e_2 \otimes \ldots \otimes e_n\right) > 0 \tag{45}$$

2.
$$\widetilde{\omega}\left(e_1 \otimes e_2 \otimes \ldots \otimes e_n\right) < 0 \tag{46}$$

Упражнение 2 *Покажите, что разбиение реперов не зависит от конкретного вида $\widetilde{\omega}$.*

Определение 20 *Базисы $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ принимающие на $\widetilde{\omega}$ положительные (отрицательные) значения называются правыми (левыми).*

Определение 21 *Многообразие называется ориентируемым, если разбиение на правые и левые реперы (базисы) можно задать на всем многообразии (гладко).*

Очевидно, это свойство эквивалентно существованию на $\mathcal{M}$ гладкого поля n-формы, необращающегося в нуль.

Определение 22 *Внешней ориентацией называется процедура построениия индуцированной ориентации в подмногообразии как свертки правой формы $\widetilde{\omega}$ с $n-p$ нормальными к подмногообразию векторами,*

$$\widetilde{\omega}^{(p)} = \widetilde{\omega}^{(n)}\left(\overline{n}_1 \otimes \overline{n}_2 \otimes \ldots \otimes \overline{n}_{n-p}\right); \tag{47}$$

$$\widetilde{\omega}^{(n)}_{i_1 \ldots i_{n-p} i_{n-p+1} \ldots i_n} \overline{n}_1^{i_1} \overline{n}_2^{i_2} \ldots \overline{n}_{n-p}^{i_{n-p}} = \widetilde{\omega}^{(p)}_{i_{n-p+1} \ldots i_n}; \tag{48}$$

(Полученная p-форма считается правой.)

В общем случае индуцировать ориентацию в подмногообразие невозможно.

Определение 23 *Многообразие называется параллелизуемым, если на нем существует гладкое реперное поле.*

Упражнение 3 *Какие параллелизуемые сферы Вы знаете?*

9 Площади и объемы

9.1 Элемент объема

В n-мерном многообразии $\mathcal{M}$ построим n линейно независимых "малых" (с "малым" множителем δ) векторов,

$$\{\delta\left(x^1\right)\frac{\partial}{\partial x^1},\delta\left(x^2\right)\frac{\partial}{\partial x^2},...\delta\left(x^n\right)\frac{\partial}{\partial x^n}\} \tag{49}$$

n-мерный элемент объема есть значение n-формы

$$\widetilde{\omega}=f\left(x\right)dx^1\Lambda...\Lambda dx^n \tag{50}$$

на тензорном произведении этого семейства векторов. Предел частных сумм приведет к интегралу функции, заданной на многообразии,

$$\int\widetilde{\omega}=\int f\left(x\right)dx^1...dx^n. \tag{51}$$

9.2 Дуальные объекты

Пусть задано многообразие $\mathcal{M}$ размерности $n=\dim\mathcal{M}$ и n-форма $\widetilde{\omega}$. В каждой точке его можно построить 4 векторных пространства равной размерности:

1. m-векторы (т.е. элементы антисимметризованного тензорного произведения $\otimes m$ векторных пространств),
2. m-формы,
3. $(n-m)$-векторы (элементы антисимметризованного тензорного произведения $\otimes(n-m)$ векторных пространств),
4. $(n-m)$-формы.

Определение 24 *Сопоставление всякому тензору $T^{[i_1\cdots i_p]}$ его свертки с n-формой $\widetilde{\omega}$,*

$$^*T\equiv\widetilde{\omega}\left(T\right) \tag{52}$$

с координатами

$$\frac{1}{p!}\underline{\widetilde{\omega}_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\ldots i_n}T^{[i_1\cdots i_p]}} \tag{53}$$

называется отображением дуализации. Дуальный тензор $^*T$ есть $(n-p)$-форма.

Упражнение 4 *Постройте вектор, дуальный к внешнему произведению $v\wedge u$ векторов v и u из $\mathbf{R}^3$. Покажите, что при полном отражении*

$$^*\left(v\wedge u\right)\xrightarrow{P}-^*\left(v\wedge u\right) \tag{54}$$

т.е. дуальный тензор $^*(v \wedge u)$ *ведет себя как вектор. (В то же время, так называемое "векторное произведение" – это 2-вектор, т.е. антисимметризованный* $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$*-тензор, он не меняет знак при отражении.)*

Упражнение 5 *Покажите, что в общем случае повторная дуализация воспроизводит исходный тензор с точностью до множителя:*

$$^{**}T_{[i_1\ldots i_p]} = (-1)^{p(n-p)}\, T_{[i_1\ldots i_p]}. \tag{55}$$

9.3 Символ Леви-Чивита.

В n-мерном многообразии рассмотрим n-форму $\widetilde{\omega}$, все ненулевые компоненты которой равны ± 1. В ортонормированном базисе она имеет компоненты

$$\epsilon_{i_1\ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{для четной перестановки индексов} 1, 2, ..., \text{n}, \\ -1 & \text{для нечетной перестановки индексов,} \\ 0 & \text{в иных случаях.} \end{cases} \tag{56}$$

Упражнение 6 *Проверьте следующее соотношение:*

$$\epsilon_{i_1\ldots i_n}\epsilon^{j_1\ldots j_n} = n!\delta^{j_1}_{[i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_n}_{i_n]} \tag{57}$$

В частности, для двумерного пространства справедливо равенство

$$\epsilon_{ij}\epsilon^{kl} = 2!\delta^k_{[i}\delta^l_{j]} = \delta^k_i\delta^l_j - \delta^k_j\delta^l_i; \tag{58}$$

9.4 Символ Леви-Чивита и определители

Для $A \in Mat\,(n, R)$, имеем

$$\det A = \epsilon_{i_1\ldots i_n} A^{1i_1}A^{2i_2}\cdots A^{ni_n}. \tag{59}$$

Упражнение 7 *Докажите справедливость следующей формулы:*

$$\det A = \frac{1}{n!}\epsilon_{j_1\ldots j_n}\epsilon_{i_1\ldots i_n}A^{j_1i_1}A^{j_2i_2}\cdots A^{j_ni_n}. \tag{60}$$

9.5 Форма объема

Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие, снабженное метрическим тензорным полем с компонентами $g_{\mu\nu}$, и

$$g = \det g_{ij}.$$

Определение 25 *<u>Инвариантной формой объема</u> называется n-форма*

$$\omega = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{61}$$

В специальной теории относительности $\det g = -1$. В выражении для инвариантной формы объема вместо модуля $|g|$ часто используется $-g$:

$$\omega = \sqrt{-g}dx^{0'} \wedge dx^{1'} \wedge dx^{2'} \wedge dx^{3'}. \tag{62}$$

10 Внешнее дифференцирование.

Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие размерности n, $V = T_{(m)}$ – касательное пространство к $\mathcal{M}$ в точке m. На пространстве гладких f функций на $\mathcal{M}$ рассмотрим функционал

$$(df)(v) \equiv \frac{d}{d\tau} f(\sigma_v(\tau))\,|_{\tau=0} = \tag{63}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha(v) \equiv \boxed{\nabla \mathrm{f}}\,(v) \tag{64}$$

Определение 26 *Функционал df называется <u>дифференциалом</u> или <u>градиентом функции</u>. Его значение на касательном векторе суть <u>производная функции вдоль направления</u>.*

Отображение

$$f \xrightarrow{d} \nabla f \tag{65}$$

есть частный случай общей операции <u>*внешнего дифференцирования*</u>.

Определение 27 *<u>Внешним дифференциалом или внешним дифференцированием</u> называется линейный оператор на тензорной алгебре со свойствами:*

- $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$;
- $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d(\omega_2)$; для $k-$ формы ω_1
- $df = \nabla f$;
- $d^2 = 0$;

Определение 28 *Внешняя форма ω со свойством $d\omega = 0$ называется <u>замкнутой</u>.*

Определение 29 *Внешняя форма ω со свойством $\omega = d\psi$ называется <u>точной</u>.*

11 Теорема Стокса

Пусть на p-мерной границе $\partial\mathcal{N}$ в $p+1$-мерной области $\mathcal{N}$ задана p-форма ω.

Теорема 2

$$\int\limits_{\partial\mathcal{N}} \omega = \int\limits_{\mathcal{N}} d\omega \tag{66}$$

Для $\dim \mathcal{N} = n = 2$, т.е. $p = 1$, имеем <u>*формулу Грина*</u>:

$$\pm \oint_{\partial \mathcal{N}} \omega_\alpha dx^\alpha = \int\limits_{\mathcal{N}} \left(\omega_{1,2} - \omega_{2,1}\right) dx^1 dx^2. \tag{67}$$

Для $n = 3 = \dim \mathcal{N}$ и $p = 2$, 2-формы ω и двумерной границы области $\partial \mathcal{N}$ имеем <u>*формулу Остроградского-Гаусса*</u>:

$$\oint_{\partial \mathcal{N}} \left({}^*\omega^i\right) \left({}^*n_i\right) d\sigma = \int\limits_{\mathcal{N}} \frac{\partial}{\partial x^k} \; {}^*\omega^k dV; \tag{68}$$

Упражнение 8 *Рассмотрите двумерную облвасть $\mathcal{N}$ в трехмерном пространстве. Убедитесь, что в этом случае из теоремы Стокса следует соотношение, которое принято называть <u>классическаой формулой Стокса</u>.*

12 Пыль

Определение 30 *<u>Вектором плотности потока частиц</u> называется произведение плотности числа частиц (пыли) $n(x)$ и вектора скорости (наблюдателя относительно пыли) $u(x)$:*

$$N(x) = n(x)\, u(x) = \left(n(x)\,\gamma, n(x)\,\gamma\overline{\beta}\right) \tag{69}$$

Упражнение 9 *Зная собственную плотность $n(x)$, вектор скорости наблюдателя u и параметрически заданную поверхность S, получите выражение для плотности потока частиц через поверхность.*

13 Тензор энергии-импульса

Определение 31 *<u>Тензором энергии-импульса</u> системы (среды) называется симметричный тензор валентности $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, свертка которого с тензорным произведением 1-форм $d(\phi)$ и $d(\psi)$ составляет плотность потока проекции импульса p на нормаль к поверхности $\phi = \mathrm{const}$ через поверхность $\psi = \mathrm{const}$.*

Тензор энергии-импульса пыли с собственной плотностью $\rho(x)$:

$$\mathbf{T}_{(\mathrm{dust})}(x) = \rho(x) \cdot u(x) \otimes u(x)\,. \tag{70}$$

14 Законы сохранения

Тензор энергии-импульса позволяет ввести компактную запись для законов сохранения:

$$\mathbf{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{71}$$

15 Идеальная жидкость

Определение 32 *Идеальной жидкостью называется система, при рассмотрении которой в сопутствующей ИСО наблюдается отсутствие вязкости и теплопередачи.*

Тензор энергии-импульса идеальной жидкости равен

$$\mathbf{T}_{(\text{liq})} = (\rho + p)\, u \otimes u - p\, (\eta)^{-1} . \tag{72}$$

В сопутствующей ИСО тензор энергии-импульса идеальной жидкости диагонален,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} . \tag{73}$$

15.1 Законы сохранения для идеальной жидкости

Пусть $\overline{n}$ – нормированный вектор в направлении вектора скорости наблюдателя, β – модуль вектора скорости, n – плотность числа частиц (жидкости), $\rho\,(x)$ – собственная плотность.

$$d\rho - \frac{1}{n}\,(\rho + p)\, dn = 0; \tag{74}$$

Уравнение состояния идеальной жидкости:

$$(\rho + p)\, \overline{a} + \overline{dp} = 0. \tag{75}$$

15.2 Термодинамическая интерпретация закона сохранения

Закон сохранения:

$$d\rho - \frac{1}{n}\,(\rho + p)\, dn = nT\,(dS) = 0. \tag{76}$$

Рассмотрим значение дифференциала в правой части равенства на векторе собственного времени системы $\frac{\partial}{\partial \tau}$. Полученный закон сохранения означает, что

$$dS \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right) = 0. \tag{77}$$

Удельная энтропия в идеальной жидкости сохраняется. Такое движение называется *адиобатическим*.

15.3 Звездная материя

Массивные звезды создают сильное гравитационное поле и в соотношении

$$(\rho + p)\,\overline{a} = -\overline{dp} \tag{78}$$

модуль вектора $\overline{dp} = \overline{\nabla} p$ должен быть достаточно велик, чтобы противостоять гравитационным силам.

Релятивистская "поправка" становится существенной, когда величина давления сравнима с плотностью

$$\overline{a}_{(\mathrm{grav})i} = -\frac{p_{,i}}{(\rho + p)}. \tag{79}$$

В процессах, связанных с увеличенияем давления, система может потерять устойчивость.

16 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

16.1 Тензор напряженности F

Электромагнитное поле в пространстве Минковского описывается 2-формой напряженности F

$$F_{\mu\nu} dx^{\mu} \Lambda dx^{\nu} \equiv F \tag{80}$$

с компонентами

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{rrrr} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{array}. \tag{81}$$

Тензоры F и F^{*} обладают свойствами:

$$F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 4\pi J^{\nu}, \tag{82}$$

или

$$d\,({}^{*}F) = 4\pi^{*} J; \tag{83}$$

что соответствует

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi\rho; \tag{84}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} - \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = 4\pi \overrightarrow{J}; \tag{85}$$

и

$$\sum_{P(\alpha,\beta,\mu)} F_{\alpha\beta}{}_{,\mu} = 0; \tag{86}$$

или

$$dF = 0; \tag{87}$$

что соответствует

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \tag{88}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \tag{89}$$

Упражнение 10 *Покажите, что в терминах трехмерных напряженностей инварианты, построенные из компонент тензора напряженности, имеют вид*

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \vec{E}^2\right); \tag{90}$$

$$F_{\mu\nu} \quad {}^*F^{\mu\nu} = \left(\vec{E} \cdot \vec{B}\right) \tag{91}$$

Из $dF = 0$ следует

$$F = dA, \tag{92}$$

где A есть 1-форма с компонентами A_μ,

$$A = A_\mu dx^\mu. \tag{93}$$

В терминах 1-формы потенциала уравнения Максвелла имеют вид

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\mu} - A^{\nu,\mu}{}_{,\mu} = 4\pi J^\nu; \tag{94}$$

$$d\,(dA) = 0. \tag{95}$$

16.2 Тензор энергии-импульса и его дивергенция

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha}\right); \tag{96}$$

компоненты симметричного 2-тензора T, описывающего поток импульса электромагнитного поля.

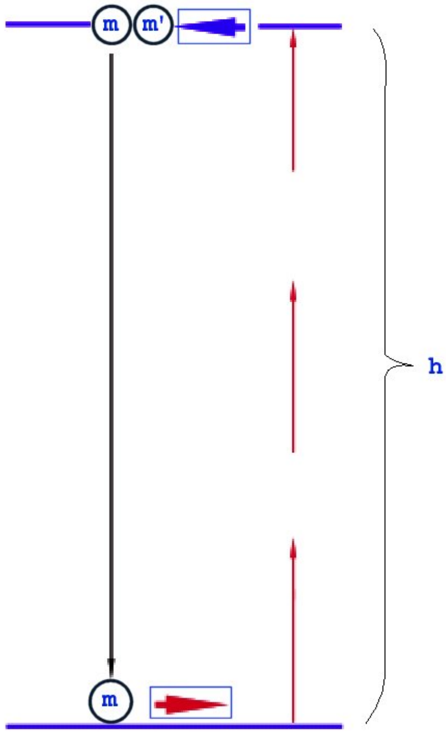
$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{B}^2 + \vec{E}^2\right). \tag{97}$$

– плотность энергии электромагнитного поля.

Закон сохранения энергии-импульса электромагнитного поля:

$$T^{\nu}_{\mu}{}_{,\nu} = \frac{F_{\mu\alpha}}{4\pi} 4\pi J^\alpha = F_{\mu\alpha} J^\alpha. \tag{98}$$

17 Эксперимент Паунда-Ребка-Шнайдера



Чтобы избежать эффекта вечного двигателя, приходится предположить, что энергия излучения (направленного вверх) уменьшается так, что происходит его *гравитационное красное смещение*:

$$\nu' = \nu\,(1 - gh)\,. \tag{99}$$

Существует система отсчета, где эффект красного смещения отсутствует (система "падающего лифта"). Компенсация красного смещения в такой системе носит исключительно локальный характер.

♦♦♦♦♦♦♦♦♦

Конец первой части

♦♦♦♦♦♦♦♦♦

****