

# Теория относительности и гравитация

Развернутый план лекций

## Часть II

### 1 Аффинное пространство

#### 1.1 Связность в аффинном пространстве

**Определение 1** *Аффинным пространством над полем  $\mathbf{K}$  называется множество  $A$  (точек), эквивалентное множеству векторов линейного пространства  $V$ . Эквивалентность осуществляется выбором "выделенной точки"  $0 \in A$ :*

$$\{(0, a) \equiv v(0, a)\}. \quad (1)$$

Выполняется равенство

$$\overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(b, c)} + \overrightarrow{(c, a)} = 0. \quad (2)$$

В криволинейных координатах аффинного пространства плоский параллельный перенос описывается соотношением

$$dv^k = -\Gamma_{ij}^k v^i dx^j \quad (3)$$

**Определение 2** *Коэффициенты  $\Gamma_{ik}^l$  разложения вектора  $\Gamma_{ik} \equiv \frac{\partial e_i}{\partial x_k}$  называются коэффициентами связности в аффинном пространстве.*

Для гладкой кривой  $\sigma(\tau)$  с касательным вектором  $X$  получим параллельный перенос вектора вдоль кривой:

$$dv^k(X) = -\Gamma_{ij}^k v^i dx^j(X) - \Gamma_{ij}^k v^i X^j. \quad (4)$$

При преобразовании координат операторами  $D_l^q = \frac{\partial x'^q}{\partial x^l}$  и  $\frac{\partial x^j}{\partial x'^q} = (D^{-1})_q^j$  коэффициентами связности преобразуются,

$$\Gamma'_{pq} = (D^{-1})_k^m (D^{-1})_p^j \Gamma_{jm} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^p \partial x'^q} e_j. \quad (5)$$

В метрическом пространстве коэффициентами связности можно выразить через производные метрического тензора,

$$\Gamma_{i \ jk} = \frac{1}{2} (g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}), \quad (6)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}). \quad (7)$$

**Определение 3** Коэффициенты  $\Gamma_{i \ jk}$  называются символами Кристоффеля первого рода.

Коэффициенты  $\Gamma_{jk}^i$  называются символами Кристоффеля второго рода.

## 2 Связность на многообразии

**Определение 4** Гладкое многообразие  $M$ , снабженное гладким полем  $\Gamma$  свойствами преобразования

$$\Gamma_{pq}^{ts}(m) = \frac{\partial x^m}{\partial x'^p} \frac{\partial x^j}{\partial x'^t} \frac{\partial x'^s}{\partial x^i} \Gamma_{jm}^i + \frac{\partial^2 x'^s}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^j}{\partial x'^t}; \quad (8)$$

называется пространством аффинной связности  $\mathcal{L}^n$ .

**Определение 5** Гладкое тензорное поле  $S$  валентности  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , равное антисимметризованному по нижним индексам полю связности,

$$S_{ij}^k(m) = \Gamma_{ji}^k(m) - \Gamma_{ji}^k(m), \quad (9)$$

называется кручением.

Правило параллельного переноса ковариантно относительно преобразования координат.

### 2.1 Геодезические в пространстве аффинной связности

**Определение 6** Гладкая кривая, являющаяся решением системы уравнений

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}; \quad (10)$$

$$x^k \Big|_{\tau=0} = x_0^k, \quad \frac{dx^i}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = v_0^i. \quad (11)$$

называется геодезической кривой.

Основное свойство геодезической кривой – её касательные векторы инвариантны относительно параллельного переноса.

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством касательных векторов в  $(\cdot)t$  и множеством геодезических, проходящих через неё.

**Определение 7** Пространство аффинной связности  $\mathcal{L}^n$  называется проективно евклидовым, если в некоей окрестности каждой его точки существуют координаты  $x$ , в которых все геодезические будут прямыми,

$$x^i = a^i \tau + b^i. \quad (12)$$

## 2.2 Геодезические координаты

Пространство аффинной связности не является локально аффинным.

**Определение 8** Координаты, удовлетворяющие уравнению

$$\Gamma_{ij}^k(m) \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{s'}}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (13)$$

называются геодезическими координатами в точке  $(\cdot)t$ .

В геодезических координатах параллельный перенос вдоль вектора в точке  $(\cdot)t$  тривиален:

$$d v = 0. \quad (14)$$

**Утверждение 1** Для всякой гладкой кривой  $\sigma(\tau)$  в  $\mathcal{L}^n$  можно построить координаты, такие что связность тривиализуется на всей  $\sigma(\tau)$  (в пределах одной карты):

$$\Gamma(\sigma(\tau)) = 0.$$

## 2.3 Пространство с абсолютным параллелизмом

**Определение 9** Пространством с абсолютным параллелизмом называется пространство аффинной связности, в котором результат параллельного переноса вектора не зависит от пути.

В таком пространстве набор базисных векторов в точке с помощью параллельного переноса порождает поле базисных векторов. Набор реперов – реперное поле.

## 3 Риманово пространство

### 3.1 Основные свойства риманова пространства

**Определение 10** *Римановым пространством* называется гладкое многообразие  $\mathcal{V}^n$ , снабженное гладким, симметричным, невырожденным, валентности  $\binom{0}{2}$  полем  $g$  метрического тензора.

**Простейшие свойства риманова пространства:**

1. Одно и то же многообразие  $\mathcal{M}^n$  можно снабдить разными метриками  $g$ .
2. Чтобы многообразие  $\mathcal{M}^n$  было метризуемым, достаточно потребовать от него дважды непрерывной дифференцируемости.
3. Строго говоря, пространство называется римановым, когда форма, заданная полем  $g$ , знакоопределена,

$$\det |g_{ij}| > 0.$$

В противном случае пространство носит название псевдориманова.

4. Существенно, что всякое касательное пространство  $T_m(\mathcal{V}^n)$  к  $\mathcal{V}^n$  является (псевдо)евклидовым с метрикой  $g(m)$ .
5. Поле метрики  $g$  позволяет устанавливать эквивалентность между ковариантными и контравариантными тензорными полями (поднимать и опускать индексы).
6. Подействовав на тензорный квадрат (малого) касательного вектора к гладкой кривой  $x^i(t)$  функционалом  $g(m)$  получим квадрат элемента дуги

$$ds^2 = g_{ij}(\{x^k\}) dx^i dx^j, \quad (15)$$

Полученное выражение является сверткой и, следовательно, инвариантом действия группы диффеоморфизмов (с операторами  $D = \frac{\partial x^i}{\partial x}$ ).

7. В римановом пространстве элемент длины суть

$$\sqrt{dx^2} = \sqrt{g_{ij} dx^i \otimes dx^j} \quad (16)$$

и длина однопараметрической кривой определяется интегралом

$$s = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij} dx^i \otimes dx^j} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij}(\{x^k(\tau)\})} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} d\tau. \quad (17)$$

### 3.2 Поверхности в римановом пространстве

**Определение 11** На поверхности  $\mathcal{V}^m$  в псевдоримановом пространстве гладкое и симметричное поле

$$G = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha \otimes du^\beta \quad (18)$$

с координатами

$$G_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} \quad (19)$$

называется индуцированной метрикой.

Это поле может оказаться вырожденным.

**Определение 12** Поверхность в псевдоримановом пространстве называется изотропной, если  $\det |G_{\alpha\beta}| = 0$ .

Если всюду на поверхности  $\det |G_{\alpha\beta}| \neq 0$ , то индуцированная метрика снабжает поверхность структурой (псевдо)риманова пространства.

**Определение 13** Поверхность в (псевдо)римановом пространстве называется неизотропной, если  $\det |G_{\alpha\beta}| \neq 0$ .

**Утверждение 2** Для риманова пространства  $\mathcal{V}^n$  всякая поверхность  $\mathcal{V}^m$  ( $n > m$ ) неизотропна.

**Определение 14** Плоскостью, нормальной к поверхности  $\mathcal{V}^m$  в  $(\cdot) z$  в (псевдо)римановом пространстве  $\mathcal{V}^n$  называется векторное пространство  $V^{n-m}$  в  $T_z^n \mathcal{M}$ , ортогональное к  $T_z^m \mathcal{M}$ .

**Утверждение 3** Всякое (псевдо)риманово пространство  $\mathcal{V}^m$  можно реализовать как поверхность в  $R^n$  ( $R^{k,l}$ ,  $k+l=n$ ), где

$$n = \frac{m(m+1)}{2}. \quad (20)$$

**Пример 1** Рассмотрим гладкую двумерную поверхность  $\mathcal{V}^2$  в  $R^3$ , заданную параметрически,

$$x^i = x^i(u, v) \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Так называемая основная квадратичная форма

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2 \quad (22)$$

превращает  $\mathcal{V}^m$  в риманово пространство с координатами метрического тензора

$$G_{11} = E(u, v); \quad (23)$$

$$G_{12} = G_{21} = F(u, v); \quad (24)$$

$$G_{22} = G(u, v). \quad (25)$$

### 3.3 Риманова связность

**Утверждение 4** В римановом пространстве  $\mathcal{V}^n$  всегда можно построить *естественную связность без кручения*, которая в этом случае называется *римановой связностью*.

Риманова связность задается условиями:

1. связность должна быть симметричной

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k,$$

2. скалярные произведения должны быть инвариантны относительно параллельного переноса.

Эти условия равносильны следующим.

**Определение 15** *Равенства*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (26)$$

определяют *риманову связность*, в римановом пространстве с метрикой  $g$ .

**Утверждение 5** В пространстве  $R^n$  при параллельном переносе вектора, касательного к гладкой поверхности  $\mathcal{V}^m$ , *дифференциалы координат вектора отличны от нуля только на векторе нормали к поверхности*.

### 3.4 Параллельный перенос тензоров

Оператор параллельного переноса является дифференцированием тензорной алгебры.

$$d^{\parallel} (v \otimes w) = (d^{\parallel} v) \otimes w + v \otimes (d^{\parallel} w). \quad (27)$$

Правило переноса для ковекторов:

$$dv_p = +\Gamma_{sp}^m v_m dx^s. \quad (28)$$

Оно без труда обобщается на произвольный тензор

$$dV_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_p} = - \sum_{k=1, \dots, p} \Gamma_{tu}^{i_k} V_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{k-1} u i_{k+1} \dots i_p} dx^t + \quad (29)$$

$$+ \sum_{l=1, \dots, s} \Gamma_{tl}^v V_{j_1 \dots j_{l-1} v j_{l+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_p} dx^t. \quad (30)$$

## 4 Ковариантное дифференцирование

**Определение 16** *Ковариантным дифференциалом*  $Dv$  вектора  $v$  (поля) называется функционал, значение которого на векторе  $X$ , касательном к кривой, равно разности векторов, исходного,  $v$ , и параллельно перенесенного,  $v_{||}$ , из соседней точки вдоль  $X$ :

$$(v_{||}(\tau) - v(\tau))^k = \quad (31)$$

$$(Dv)^k(\tau) = dv^k(\tau) + \Gamma_{ij}^k(\tau) v^i dx^j. \quad (32)$$

Ковариантный дифференциал на пространстве функционалов:

$$(Dv)_k(\tau) = dv_k(\tau) - \Gamma_{ij}^k(\tau) v_k dx^j. \quad (33)$$

Ковариантный дифференциал тензора ведет себя как тензор при преобразованиях координат. В частности,

$$(Dv)^k = (\mathbf{D}^{-1} \circ (Dv))^k \quad (34)$$

$$(Dw)_i = (\mathbf{D} \circ (Dw))_i. \quad (35)$$

**Определение 17** *Коэффициенты разложения ковариантных дифференциалов по базисным функционалам называются ковариантными производными* вдоль базисных векторов.

Ковариантные дифференциалы и производные действуют на тензорной алгебре по правилу Лейбница:

$$\nabla_l \circ (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_l \circ T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_l \circ T_2). \quad (36)$$

можно построить ковариантные производные для произвольного тензора:

$$(\nabla_l \circ T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial}{\partial x^l} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s} + \sum_{k=1, \dots, p} \Gamma_{lm}^{i_k} T^{i_1 \dots i_{k-1} m i_{k+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_s} - \quad (37)$$

$$- \sum_{l=1, \dots, s} \Gamma_{lj}^h T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{l-1} h j_{l+1} \dots j_s}. \quad (38)$$

Значение ковариантного дифференциала на векторе  $u$  есть ковариантная производная вдоль вектора  $u$ .

$$Dv(u) = \nabla_u \circ v. \quad (39)$$

Базисные ковариантные производные есть значения ковариантного дифференциала на базисных векторах:

$$Dv(e_i) = \nabla_{e_i} \circ v \equiv \nabla_i \circ v. \quad (40)$$

**Упражнение 1** Проверьте следующие простейшие свойства ковариантной производной:

$$\nabla_{fu} \circ T = fu^j (\nabla_j \circ T) = f (\nabla_u \circ T), \quad (41)$$

$$\nabla_{u_1+u_2} \circ T = (\nabla_{u_1} + \nabla_{u_2}) \circ T, \quad (42)$$

$$\nabla_{fu_1+gu_2} \circ T = (f\nabla_{u_1} + g\nabla_{u_2}) \circ T. \quad (43)$$

$$\nabla_i \circ e_j = \Gamma_{ij}, \quad (\nabla_i \circ e_j)^k = \Gamma_{ij}^k \quad (44)$$

#### 4.1 Ковариантно постоянные тензоры

Пусть задана гладкая кривая  $\sigma_u(\tau)$ .

**Определение 18** Тензорное поле называется *ковариантно постоянным* на кривой  $\sigma_u(\tau)$  (с касательным вектором  $u$ ), если оно совпадает с полем, параллельно перенесенным вдоль этой кривой:

$$Dv(u) = dv(u) + \Gamma_{ij}v^i dx^j(u) = 0 \quad (45)$$

$$dv(u) = -\Gamma_{ij}v^i dx^j(u) \quad (46)$$

$$DT(u) = ((d + \Gamma) \circ T)(u) = 0 \quad (47)$$

$$dT = -\Gamma \circ T \quad (48)$$

#### 4.2 Ковариантное дифференцирование в римановом пространстве

Метрическое поле в римановом пространстве ковариантно постоянно:

$$\nabla \circ g_{ij} = 0 \quad (49)$$

$$Dg = 0 \quad (50)$$

Наличие ковариантно постоянной метрики позволяет построить оператор Лапласа:

$$\Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j. \quad (51)$$

#### 4.3 Геодезически параллельные поверхности

**Утверждение 6** Для всякой неизотропной поверхности  $\mathcal{V}^{n-1}$  можно построить *однопараметрическое семейство геодезически параллельных поверхностей*  $\mathcal{V}_{(a)}^{n-1}$ . (В каждой точке окрестности точки  $(\cdot)$  т строим геодезические вдоль нормалей к поверхности и откладываем на каждой из них отрезок равной длины.) Эти поверхности обладают общими нормальными геодезическими.

#### 4.4 Полугеодезические координаты

**Определение 19** *Полугеодезическими* называются координаты, для которых координатными поверхностями для  $n - 1$  координат служат геодезически параллельные поверхности  $\mathcal{V}_{(a)}^{n-1}$ , в то время как  $n$ -ми координатными кривыми являются общие нормали к  $\mathcal{V}_{(a)}^{n-1}$ .

Примером такой конструкции могут служить геодезически параллельные гиперсферы.

Метрический тензор в полугеодезических координатах имеет блочную структуру:

$$\{g_{lm}\} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

### 5 Тензор кривизны в пространстве аффинной связности

Коммутатор ковариантных производных помимо производной вдоль коммутатора полей содержит дополнительный оператор  $R_{ij}$ , выражающийся через операторы связности:

$$[\nabla_u, \nabla_v] = \nabla_{[u,v]} + u^i v^j \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_j - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_i + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i \right) \quad (53)$$

$$[\nabla_u, \nabla_v] = \nabla_{[u,v]} - u^i v^j R_{ij}, \quad (54)$$

с компонентами

$$R_{ij}{}^k{}_l = -\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jl}^k + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{il}^k - \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m + \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m. \quad (55)$$

Поскольку коммутатор базисных векторов равен нулю, имеем

$$[\nabla_i, \nabla_j] = -R_{ij}. \quad (56)$$

**Определение 20** *Тензором кривизны Римана* (в пространстве аффинной связности) называется коммутатор базисных ковариантных производных.

Простейшие свойства тензора кривизны Римана:

1. Тензор Римана является тензором, поскольку равен разности между ковариантной производной вдоль коммутатора полей и коммутатором ковариантных производных вдоль каждого из полей. В начальной форме его валентность —  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

2.

$$R_{ij} = -R_{ji}. \quad (57)$$

3. **Упражнение 2** *Покажите, что на пространстве функционалов оператор кривизны действует следующим образом:*

$$([\nabla_i, \nabla_j] v)_k = R_{ij}{}^l{}_k v_l. \quad (58)$$

4. Тензор Римана описывает изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура, натянутого на базисные векторы.
5. В аффинном пространстве, где существуют координаты, в которых  $\Gamma = 0$ , тензор Римана обращается в нуль,  $R_{ij} = 0$ .
6. Кривизна – мера отличия пространства от пространства с абсолютным параллелизмом.
7. Чтобы пространство было локально аффинным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело нулевую кривизну и нулевое кручение.

## 6 Свойства тензора кривизны

### 6.1 Геометрическая интерпретация тензора кривизны

Для вариации координат вектора  $v$  при параллельном переносе по малому замкнутому контуру, границе поверхности  $S$ , имеем

$$\delta^{\parallel} v^i = v^i(t) - v^i(0) = \quad (59)$$

$$= R_{mkj}{}^i v^j \chi^{mk} \delta S \quad (60)$$

В пространстве аффинной связности всякой малой гладкой двумерной поверхности  $S$  сопоставляется тензорный оператор

$$R_{mkj}{}^i \chi^{mk}, \quad (61)$$

который преобразует вектор при параллельном переносе вдоль границы поверхности. Результат линеен по компонентам вектора и площади поверхности.

### 6.2 Тождества Риччи и Бьянки

**Определение 21** *Соотношение*

$$R_{mkj}{}^i + R_{jmk}{}^i + R_{kjm}{}^i = 0 \quad (62)$$

$$(63)$$

называется *тождеством Риччи*.

**Определение 22** *Соотношение*

$$\nabla_m R_{ij} + \nabla_j R_{mi} + \nabla_i R_{jm} = 0; \quad (64)$$

называется *тождеством Бьянки*.

**Упражнение 3** *Докажите тождество Бьянки.*

Указание: перейдите в геодезические координаты.

## 7 Тензор кривизны в римановом пространстве

В римановом пространстве связность выражается через производные метрического тензора и, как следствие,

$$\begin{aligned} R_{ijkm} &= +\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ki}{}^m - \Gamma_{jm}^p \Gamma_{ki}{}^p = \\ &= \frac{1}{2} (g_{im,k,j} - g_{ki,m,j} - g_{jm,k,i} + g_{kj,m,i}) - \\ &\quad - g_{pq} (\Gamma_{jm}^p \Gamma_{ki}^q - \Gamma_{im}^p \Gamma_{kj}^p) \end{aligned} \quad (65)$$

Его свойство симметрии

$$R_{ijkm} = R_{kmij}. \quad (66)$$

Следствия свойств симметрии:

1.

$$R_{ijkm} = -R_{ijmk}; \quad (67)$$

2. Тождество Бьянки можно писать для любой тройки индексов,

$$R_{ijkm} + R_{imjk} + R_{ikmj} = 0. \quad (68)$$

3. Число независимых компонент тензора кривизны равно

$$\frac{n^2 (n^2 - 1)}{12} \quad (69)$$

В частности,  $d = 3 \rightarrow 6$ ,  
 $d = 4 \rightarrow 20$ .

4. В геодезических координатах:

$$R_{ijkl}(m) = \frac{1}{2} (g_{il,j,k} + g_{jk,i,l} - g_{ik,j,l} - g_{jl,i,k}). \quad (70)$$

## 7.1 Тензор Риччи

**Определение 23** *Тензором Риччи называется свертка*

$$R_{jk} \equiv R_{(i)jk}{}^{(i)}. \quad (71)$$

В римановом пространстве тензор Риччи будет симметричен:

$$R_{i\ jk}{}^i = g^{ab} R_{\underbrace{ajkb}} = g^{ab} R_{\underline{kba}j} = g^{ab} R_{bkja} = R_{bkj}{}^b; \quad (72)$$

## 8 Секционная кривизна

**Угол доворота** касательной составляющей вектора при параллельном переносе вдоль малого замкнутого контура равен **свертке тензора кривизны со стандартными тензорами  $\chi$  и  $\varkappa$**  и пропорционален площади контура:

$$\varphi = \delta v^l w^m g_{lm} = R_{ijkl} \chi^{ij} \varkappa^{km} \delta S, \quad (73)$$

$$\varkappa^{km} = \frac{1}{2} (v^k w^m - v^m w^k). \quad (74)$$

**Определение 24** *Предел отношения угла доворота к площади поверхности, натянутой на замкнутый контур,*

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\delta S} = R_{ijkl} \chi^{ij} \varkappa^{km} \equiv K \quad (75)$$

*называется **секционной кривизной**.*

Для малого контура стандартные тензоры  $\chi$  и  $\varkappa$  совпадают:

$$K = R_{ijkl} \chi^{ij} \chi^{km}, \quad (76)$$

$$\varphi = K \delta S. \quad (77)$$

Поскольку  $|\chi| = 1$ , выражение для секционной кривизны можно переписать в виде

$$K = \frac{R_{ijkl} \chi^{ij} \chi^{km}}{(g_{ik} g_{jm} - g_{im} g_{jk}) \chi^{ij} \chi^{km}}. \quad (78)$$

### 8.1 Секционная кривизна в двумерном пространстве

Угол доворота не зависит от выбора точки на контуре.

При дроблении поверхности внутри контура,  $S = \mathcal{O}^I$  и  $\mathcal{O}^{II}$ , угол доворота ведет себя аддитивно:  $\varphi = \varphi^I + \varphi^{II}$ .

$$\varphi = \sum K \cdot \delta S \longrightarrow \int K \cdot \delta S \quad (79)$$

Если кривизна постоянна, то  $K = \text{const}$

$$\varphi = K \cdot S. \quad (80)$$

## 9 Римановы координаты

**Определение 25** *Римановыми координатами в точке  $(\cdot) m$  называются такие, где каждая точка  $(\cdot) y$  (в окрестности  $(\cdot) m$ ) задается касательным вектором  $X(m)$  к геодезической, исходящей из  $(\cdot) m$  и проходящей через  $(\cdot) y$ , и каноническим расстоянием  $\tau y$  (длиной отрезка геодезической).*

Свойства римановых координат:

1. Уравнения геодезических (проходящих через  $(\cdot) m$ ) принимают в римановых координатах вид

$$\frac{d^2 X^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k X^i X^j = 0. \quad (81)$$

Интегральные уравнения геодезических,

$$\Gamma_{ij}^k X^i X^j \tau^2 = \Gamma_{ij}^k y^i y^j = 0. \quad (82)$$

$$y^i = X^i(m) \cdot \tau. \quad (83)$$

2. Римановы координаты являются геодезическими в точке  $(\cdot) m$ :

$$\Gamma_{ij}^k(m) = 0. \quad (84)$$

3. Пусть  $y_i$  – координаты точки на геодезической кривой. Квадрат длины геодезической (проходящих через  $(\cdot) m$ ) выражается через римановы координаты и значение метрического тензора в  $(\cdot) m$ :

$$\tau^2 = g^{ij}(m) X_i X_j \tau^2 = g^{ij}(m) y_i y_j. \quad (85)$$

4. Полагая  $\tau^2 = \text{const}$  получаем уравнения сфер с центром  $(\cdot) m$ . В каждой точке такой сферы геодезические ортогональны к ее поверхности.
5. Римановы координаты не являются полугеодезическими. Преобразование римановых координат в полугеодезические (в области  $y^n > 0$ ):

$$\left\{ u^1 = \frac{y^1}{y^n}, u^2 = \frac{y^2}{y^n}, \dots, u^{n-1} = \frac{y^{n-1}}{y^n}, \tau \right\}. \quad (86)$$

## 10 Пространства постоянной кривизны

**Определение 26** *Пространством постоянной кривизны называется такое, в каждой точке которого секционная кривизна по любой малой 2-мерной поверхности одинакова.*

К пространствам постоянной кривизны относятся пространства:

1. евклидовы;
2. Лобачевского;
3. сферические и эллиптические.

Свойства пространств постоянной кривизны:

1. Пространство постоянной кривизны изотропно в каждой своей точке.
2. Для пространств постоянной кривизны справедливо равенство

$$R_{ijkl} = K (g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}). \quad (87)$$

### 3. Теорема 1 *Теорема Шура.*

*В  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны при  $n \neq 2$  секционная кривизна  $K$  постоянна.*

Доказательство основывается на свойстве

$$\nabla_l R_{ijkl} = (K, l) (g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk}). \quad (88)$$

В случае двумерного пространства подобное утверждение неверно.

## 11 Тензор Эйнштейна

**Определение 27** *Тензор*

$$R^{jk} - \frac{1}{2}g^{jk}R$$

называется *тензором Эйнштейна*.

**Утверждение 7** *Ковариантная дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю:*

$$\nabla_k \left( R^{jk} - \frac{1}{2}g^{jk}R \right) = 0. \quad (89)$$

## 12 Сфера как пространство аффинной связности и риманово пространство

Квадрат интервала на сфере  $S^2$  в угловых координатах:

$$ds^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2. \quad (90)$$

**Упражнение 4** *Постройте для сферы  $S^2$  в угловых координатах*

1. матрицу метрического тензора;
2. коэффициенты связности;

3. геодезические кривые;
4. тензор кривизны Римана;
5. тензор Риччи;
6. скалярную кривизну;
7. покажите, что сфера  $S^2$  есть пространство постоянной кривизны.

Существенное усиление:

**Утверждение 8** *Сфера  $S^{n-1}$  в  $R^n$  есть пространство постоянной кривизны. Всякая геодезическая на сфере есть дуга окружности большого радиуса.*

## 13 Принципы общей теории пространства времени и тяготения

### 13.1 Пространство-время

Пространство-время есть четырехмерное псевдориманово многообразие.

### 13.2 Пространство-время и материя

Пространство-время определяет законы движения материи.

В свою очередь материя определяет геометрию пространства-времени.

Всякое воздействие материи на пространство-время сводится к изменению метрики.

В качестве полей, необходимых для описания тяготения достаточно рассмотреть метрическое поле (римановость пространства).

### 13.3 Принцип эквивалентности

Принцип эквивалентности утверждает, что коэффициенты в первом и третьем законах Ньютона совпадают.

$$F_{inertia} = m_{inertia} \cdot a = m_{grav} \cdot \nabla V_{grav} = F_{grav}. \quad (91)$$

Ускорение системы отсчета может компенсировать гравитационное воздействие. Эта компенсация не зависит от строения тел. Она локальна. Т.е. точечные массы, тяготеющая и инерционная, совпадают, но нет эквивалентности в конечных областях пространства времени.

### 13.4 Принцип ковариантности

Принцип ковариантности в теории Эйнштейна подобен принципу ковариантности в СТО: все физические законы должны формулироваться в терминах тензорной алгебры над касательным пространством к (псевдо)риманову пространству-времени. Обычно для формулировки этого принципа используется не сама алгебра а группа ее движения: все законы должны быть ковариантны относительно общекоординатных преобразований.

### 13.5 Принцип соответствия

В пределе пространственно-временных областей, малых по сравнению с неоднородностью гравитационных полей, должны выполняться законы СТО.

## 14 Конструкция модели пространства времени и тяготения

### 14.1 Локально инерциальная система отсчета

**Утверждение 9** *Метрический тензор  $g$  локально стационарен.*

Существуют преобразования координат, в результате которых компоненты метрического тензора локально оказываются равными с точностью до малых второго порядка по малости коэффициентов связности:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (92)$$

и

$$\Gamma = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (93)$$

**Определение 28** *Координаты, в которых выполняются соотношения (92), (93), называются **локально инерциальными** или **локально лоренцевыми**.*

### 14.2 Тензор энергии-импульса и уравнение Эйнштейна

Симметричное тензорное поле  $T(x^0, \dots, x^3)$  валентности  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  на пространстве на  $\mathcal{V}^4$  описывает распределение и перенос всех видов энергии и импульса.

В согласии с принципом соответствия должен выполняться закон сохранения энергии-импульса

$$\nabla_\alpha T^{\mu\alpha} = 0.$$

Причем, если в СТО этому требованию соответствовало равенство  $T^{\mu\alpha}_{;\alpha} = 0$ , то теперь имеем равенство нулю ковариантной производной:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\alpha} = 0 = T^{\mu\alpha}_{;\alpha} \quad (94)$$

**Определение 29** Уравнение

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = -\varkappa T^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} \quad (95)$$

называется **уравнением Эйнштейна** (с космологическим членом  $\Lambda$ ).

### 14.3 Тензор энергии-импульса пыли

Тензор энергии-импульса пыли в локально инерциальной системе отсчета:

$$T_{(l)} = m_{(l)} \rho_{(l)} u_{(l)} \otimes u_{(l)}; \quad (96)$$

$l$  – индекс сорта частиц.

Закон сохранения (числа частиц):

$$T_{(l)}^{\mu\alpha}{}_{;\mu} = 0. \quad (97)$$

Откуда следует, что

$$\nabla_{u_{(l)}} u_{(l)} = 0; \quad (98)$$

частицы каждого сорта движутся по геодезическим кривым (то же справедливо и для света).

## 15 Относительное ускорение соседних геодезических

Пусть  $u = \frac{\partial}{\partial \tau}$  – орт нормали к поверхности,  $n = \frac{\partial}{\partial \nu}$  – один из базисных векторов (“разделяющий” вектор в полугеодезической системе координат).

Для вектора  $n$  справедливо уравнение

$$\nabla_u \nabla_u n = R_{ij}{}^l{}_k n^i u^j u^k e_l, \quad (99)$$

В пространстве с нетривиальной кривизной наблюдается ускорение “разделяющего вектора” геодезических кривых.

## 16 Ньютоновский предел и константа $\varkappa$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad (100)$$

Здесь малыми будем считать не только величины  $\gamma_{\mu\nu}$ , но также  $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\xi}$  и  $\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\xi \partial x^\eta}$ . В ньютоновском приближении компонента  $\gamma_{00}$  удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta \gamma_{00} = \varkappa \rho; \quad (101)$$

Его решение,

$$\gamma_{00}(x) = -\frac{\varkappa}{4\pi} \int_V \frac{\rho(y)}{r(x-y)} dy^1 dy^2 dy^3. \quad (102)$$

подставим в уравнение для "ускоренного движения пыли" в слабом гравитационном поле,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \gamma_{00,i} = \frac{\varkappa}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^i} \int_V \frac{\rho(y)}{r(x-y)} dy^1 dy^2 dy^3 \quad (103)$$

Это уравнение совпадает с уравнением третьего закона Ньютона при условии

$$\frac{\varkappa}{8\pi} = G^{(Newton)} = 1; \quad (104)$$

$$\varkappa = 8\pi. \quad (105)$$

Уравнение Эйнштейна (без космологической постоянной) имеет вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu}. \quad (106)$$

## 16.1 О скорости распространения гравитационных возмущений

Гравитационные возмущения распространяются со скоростью света.

## 17 Решение Шварцшильда

Это решение строится в предположении, что в пространстве-времени присутствует лишь один сферически симметричный и стационарный массивный объект, вне его внешнего радиуса тела отсутствуют. Сферические пространственные переменные и время

$$x^0; \quad (107)$$

$$x^1 = r; \quad (108)$$

$$x^2 = \frac{\pi}{2} - \theta; \quad (109)$$

$$x^3 = \varphi \quad (110)$$

Центрально-симметричное и стационарное решение уравнений Эйнштейна ищем

в **координатах Шварцшильда**:

$$\underbrace{e^{\nu(x^1)}}_{g_{00}} (dx^0)^2 - \underbrace{e^{\lambda(x^1)}}_{g_{11}} (dx^1)^2 - \underbrace{(x^1)^2}_{g_{22}} \left( (dx^2)^2 + \sin^2(x^2) (dx^3)^2 \right) \quad (111)$$

**Упражнение 5** Покажите, что для приведенной выше метрики недиагональные компоненты тензора Риччи (для случая центрально-симметричной сосредоточенной массы) равны нулю.

**Упражнение 6** Проверьте справедливость следующих равенств:

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{x^1}\lambda'; \quad (112)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2}(\nu' - \lambda')x^1 \right) - 1; \quad (113)$$

$$R_{33} = \sin^2(x^2) \cdot R_{22}; \quad (114)$$

**Упражнение 7** Постройте выражения для компонент тензора Эйнштейна в координатах и метрике Шварцшильда. В частности, покажите, что

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 2 \left( \frac{1}{x^1} \right)^2 (1 - e^\lambda) - \left( \frac{1}{x^1} \right) \lambda' e^{-\lambda}. \quad (115)$$

**Решение Шварцшильда** имеет вид

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) (dx^0)^2 - \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_0}{r} \right)} dr^2 - r^2 \left( (d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right) \quad (116)$$

$$= \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) (dx^0)^2 - \frac{1}{\left( 1 - \frac{r_0}{r} \right)} dr^2 - r^2 d\Omega(\vartheta, \varphi), \quad (117)$$

где константа  $a$ , имеющая размерность длины, равна удвоенной массе тела,

$$a \equiv r_0 \equiv +2M. \quad (118)$$

Она носит название **шварцшильдовского радиуса**.

## 17.1 О шварцшильдовском радиусе

$$r_{0Sun} \approx 2.96km \quad (119)$$

$$r_{0Earth} \approx 0.9cm \quad (120)$$

$$r_{0Moon} \approx 0.01cm \quad (121)$$

Плотность объектов радиус которых меньше или равен  $r_0$  выше чем плотность нейтронных звезд,  $\approx 10^{16} \text{г/см}^3$ .

## 17.2 О нестационарном решении

**Теорема Биркгофа** (1923г.): Любое центрально-симметричное решение уравнений Эйнштейна статично.

**Следствие 1** Если точка наблюдения находится внутри сферической полости с центром в центре масс, то уравнение (??) приведет к значению константы интегрирования равному нулю:

$$\gamma_{00}(x^i) = -2 \int_V \frac{\rho(y)}{r(x-y)} d^3y = 0, \quad (122)$$

т.е. внутри полости метрическое поле будет совпадать с метрикой Минковского. Пространство внутри является плоским. Следствием теоремы Биркгофа является тот факт, что такое решение единственно в том числе и в классе решений с возможной зависимостью от времени. Таким образом, вывод о плоской метрике внутри сферичеки симметричной оболочки является однозначным.

Если наблюдатель погружается в сферически симметричное тело, то эффект искривления метрики для него зависит только от той части тела, на сферической границе которого он находится.

## 18 Координаты Крускала

Особенность, присутствующая в решении Шварцшильда, приводит к эффектам, которые получили название **горизонта событий**.

На шварцшильдовском радиусе наблюдается бесконечное красное смещение.

Материальное тело не может пересечь шварцшильдовский радиус за конечное время с точки зрения асимптотического наблюдателя, т.к. для этого оно (по собственному времени) должно двигаться с бесконечной скоростью.

В координатах:

$$u = \underbrace{\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} e^{\frac{r}{2r_0}} \cosh \frac{x^0}{2r_0}}_{r > r_0}; \quad \div \quad \underbrace{1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} e^{\frac{r}{2r_0}} \sinh \frac{x^0}{2r_0}}_{r < r_0}; \quad (123)$$

$$v = \underbrace{\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} e^{\frac{r}{2r_0}} \sinh \frac{x^0}{2r_0}}_{r > r_0}; \quad \div \quad \underbrace{\sqrt{1 - \frac{r}{r_0}} e^{\frac{r}{2r_0}} \cosh \frac{x^0}{2r_0}}_{r < r_0}; \quad (124)$$

метрика Шварцшильда принимает вид

$$ds^2 = \frac{4r_0^2}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (125)$$

где  $r = r(u, v)$  – функция новых координат.

- 1) На поверхности шварцшильдовского радиуса  $r = r_0$  имеем  $\implies \begin{cases} u = v \\ u = -v \end{cases}$
- 2) Область вне шварцшильдовского радиуса соответствует условиям  $u > v$  и  $u > 0$ . В этой области разумно считать координаты  $u$  и  $r$  пространственными, координаты  $v$  и  $t$  – временными.
- 3) Поверхности постоянного положительного времени изображаются прямыми  $x^0 = const = 2r_0 \tanh^{-1} \frac{v}{u} > 0$ , для которых  $\tanh \frac{x^0}{2r_0} = \frac{v}{u} = const > 0$ .
- 4) Поверхности постоянного радиуса – гиперболы  $\implies u^2 - v^2 = const$ .
- 5) При уменьшении радиуса в семействе гипербол проходим вырожденный элемент (прямые) и далее, при  $r < r_0$  имеем гиперболы  $\implies u^2 - v^2 = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) e^{\frac{r}{r_0}} = const < 0$  с осью  $v$ .
- 6) Центр прежней системы координат  $r = 0$  изображается здесь гиперболой с осью  $v$ .
- 7) Траектории распространения света  $ds^2 = 0$ , соответствуют условиям  $du = dv$  и  $du = -dv$ , т.е. соответствующие геодезические – это прямые с наклоном в  $\pi/4$  (вперед) и  $3\pi/4$  (назад).
- 9) Для полноты физической картины мы должны рассмотреть координатную плоскость  $u, v$  целиком. М.Д.Крускал и Г.Секереш показали, что можно построить **геодезически полное** многообразие  $\mathcal{V}^4$ , соответствующее решению Шварцшильда: канонический параметр любой геодезической либо продолжается до бесконечных значений, либо геодезическая ”упирается” в неустранимую особенность в нуле.

В геодезически полном  $\mathcal{V}^4$  при  $v < -1$  на поверхности постоянного времени  $v = const$  отрицательные  $u$  соответствуют ”второму” экземпляру Вселенной, отделенному от ”нашей” сингулярной областью. В момент времени  $v = -1$  сингулярная область вырождается в точку и мы получаем два асимптотически плоских пространства, соединенных областью с сильным возмущением метрики. Эта область носит название **кратовья нора, мост Эйнштейна-Розена или глотка Шварцшильда**. Никакой сигнал не может воспользоваться кратовьей норой для передачи информации из одной части Вселенной в другую. Кратовья нора всегда успевает схлопнуться. В ”ранние” и ”поздние” времена кратовья нора уже чем при  $t = 0$ . Соединение пространств прекращается при  $v = -1$  и при  $v = 1$ . Сигналы, посланные ”в направлении альтернативного пространства-времени” неизбежно попадают в ”ловушку сингулярности” в центре системы координат.

## 19 Решение Шварцшильда и звездная материя

В локально лоренцевой системе отсчета используем для идеальной жидкости тензор энергии-импульса (полученный в СТО),

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (126)$$

$$T^{11} = (p + \rho) \underbrace{u^1 u^1}_0 - p g^{11} = +p e^{-\lambda} \quad (127)$$

$$T_{00} = \rho g_{00} = \rho e^\nu, \quad (128)$$

законы сохранения

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0; \quad (129)$$

в виде

$$(p + \rho) \nabla_u u - \underbrace{\nabla p}_{\frac{\partial p}{\partial x}} + u \nabla_u p = 0, \quad (130)$$

а также компоненты тензора Эйнштейна, полученные в предыдущих упражнениях:

$$G_{00} = e^\nu \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r (e^{-\lambda} - 1)) = -2 \frac{1}{r^2} e^\nu m'(r); \quad (131)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{r} \nu' + \frac{1}{r^2} e^\lambda \underbrace{(1 - e^{-\lambda})}_{\frac{2m(r)}{r}}; \quad (132)$$

В итоге убеждаемся в том, что в искомом решении функция  $m(r)$  имеет значение массы внутри сферы, на которой находится наблюдатель,

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^r 4\pi \rho \cdot r^2 dr + m(0) = \\ &= 4\pi \int_0^r \rho \cdot r^2 dr, \end{aligned} \quad (133)$$

и находим уравнение идеальной жидкости, находящейся в состоянии гидростатического равновесия под действием гравитационных сил и давления,

$$p' = -\frac{(p + \rho) (m(r) + 4\pi p r^3)}{r (r - 2m(r))}; \quad (134)$$

Последнее уравнение носит имя **Оппенгеймера-Волкова**.

## 19.1 Пределы Ньютона и Лоренца

Предел Лоренца:

$$p r^3 \ll m(r) \ll r, \quad (135)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p + \rho) m(r)}{r^2}. \quad (136)$$

Предел Ньютона:

$$\begin{aligned} \rho \gg p, \\ \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho m(r)}{r^2}; \end{aligned} \quad (137)$$

Выводы:

1. в модели ТПВТ градиент давления разгоняется сильнее, чем в СТО (за счет добавочного члена в числителе для  $p'$ ),
2. при  $2m(r) \approx r$  система теряет устойчивость (это дополнительный фактор, которого не было в СТО).

## 20 Модели звезд

Для звезды с постоянной плотностью ( $\rho$  не зависит от  $p$ ),

$$\rho = \rho_0 = \text{const}, \quad (138)$$

Фиксируем значения остальных параметров при  $r = 0$ :

$$p(r=0) \equiv p_0 \quad (139)$$

$$\nu(r=0) \equiv \nu_0 \quad (140)$$

$$m(r=0) \equiv m_0 = 0; \quad (141)$$

Уравнение (133) описывает распределение масс

$$m(r) = \begin{cases} \int_0^r 4\pi\rho_0 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_0 & r \leq R \\ M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0 & r \geq R \end{cases} \quad (142)$$

**Упражнение 8** Найдите решение уравнения Оппенгеймера-Волкова при заданных граничных условиях и с учетом полученного выше распределения масс  $m(r)$ .

**Ответ:**

$$\frac{\rho_0 + 3p}{\rho_0 + p} = \frac{\rho_0 + 3p_0}{\rho_0 + p_0} \left(1 - 2\frac{m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad (143)$$

Давление в центре:

$$p_0 = p(0) = \rho_0 \frac{1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}. \quad (144)$$

Откуда при фиксированном  $M$ :

$$R_{\min} = \frac{9}{4}M; \quad (145)$$

При фиксированном  $\rho_0$ :

$$R_{\max} = \sqrt{\frac{1}{3\pi\rho_0}}. \quad (146)$$

$$M_{\max} = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{1}{3\pi\rho_0}}; \quad (147)$$

## 21 О космологической постоянной

### 21.1 Смысл космологической постоянной

Член  $\Lambda g_{\mu\nu}$  можно интерпретировать как тензор энергии-импульса вакуума:

$$\rho_{vac} = -\frac{\Lambda}{4\pi}; \quad (148)$$

причем, если  $\Lambda > 0$ , то плотность энергии вакуума отрицательна. Такая плотность энергии будет приводить к отталкиванию. Потенциал  $\gamma_{00}$  в уравнении

$$\frac{1}{2}\Delta\gamma_{00} = -\Lambda; \quad (149)$$

ведет себя как

$$\gamma_{00} \sim -\Lambda r^2. \quad (150)$$

Он растет с ростом  $r$ .

### 21.2 Геометрия центрально-симметричного решения с космологической постоянной

Решение уравнения Эйнштейна для сферически симметричного распределения материи в присутствии космологического члена:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{b}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) (dx^0)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)} dr^2 - r^2 (d\Omega). \quad (151)$$

Введем константу

$$R \equiv \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \quad (152)$$

и координаты:

$$\begin{cases} \tilde{r} = r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{R}x^0}; \\ \tilde{x}^0 = x^0 + \frac{1}{2}R \ln \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \end{cases} \quad (153)$$

В новых координатах:

$$ds^2 = (d\tilde{x}^0)^2 - e^{\frac{2}{R}\tilde{x}^0} (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega). \quad (154)$$

## 22 Движение планет

Для описания движения тела в центрально-симметричном поле шварцшильдовский интервал можно записать в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\varphi^2. \quad (155)$$

Уравнение движения по геодезической:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = a^2 - b^2 \frac{1}{r^2} e^{-\lambda} - c e^{-\lambda}. \quad (156)$$

Для обратного радиуса  $\xi = \frac{1}{r}$ , имеем

$$\frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \xi + q \xi^2, \quad (157)$$

где использованы параметры: фокальный,  $p \equiv \frac{2}{r_0 B}$ , мера отклонения от классической траектории,  $q \equiv \frac{3}{2} r_0$ . Ньютоновское уравнение для движения небесных тел,

$$\frac{d^2 \xi}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \xi, \quad (158)$$

имеет в качестве решений **конические сечения**

$$r_{(0)}(\varphi) = \frac{p}{1 + u \cos \varphi}; \quad (159)$$

с эксцентриситетом "u" и фокальным параметром "p" Решение уравнения (157) (приближенное):

$$\xi \approx \frac{1}{p} \left( 1 + u \cos \left( \varphi \left( 1 - \frac{q}{p} \right) \right) \right). \quad (160)$$

Геодезическая кривая, описываемая этим решением, не замкнута. Чтобы вернуться к исходному значению амплитуды, наблюдатель должен "вернуться" на **угол прецессии**:

$$\varepsilon = 2\pi \frac{q}{p} \quad (161)$$

Параметры, определяющие угол прецессии,

$$q = \frac{3}{2} r_0 = 3M \quad (162)$$

$$p \approx r_{orb} \quad (163)$$

Угол в радианах, набегающий за одну орбиту.

$$\varepsilon = 6\pi \frac{M}{r_{orb}}. \quad (164)$$

Для Меркурия

$$100 \text{ years} \implies \approx 400 \text{ orb} \quad (165)$$

$$\varepsilon_{Merk} (100 \text{ years}) \approx 43'' \quad (= 20,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad}). \quad (166)$$

## 23 Движение света в центрально симметричном поле

Для луча света в качестве пробного объекта, движущегося в поле массивного сферически симметричного тела, уравнение (157) имеет вид

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = \frac{3}{2}r_0\xi^2 - \xi = q\xi^2 - \xi. \quad (167)$$

В классическом пределе имеем уравнение прямой, проходящей на прицельном расстоянии  $R$  от центра масс. Полное решение имеет вид

$$\xi(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{q}{3R^2}(1 + \sin^2\varphi). \quad (168)$$

Отклонение от классического движения находится из рассмотрения условия

$$\xi(\varphi) = 0. \quad (169)$$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)}{R} + \frac{2}{3}\frac{q}{R^2} = 0; \quad (170)$$

”Линейная” составляющая отклонения равна

$$\delta = \frac{2}{3}\frac{q}{R}. \quad (171)$$

**Упражнение 9** Покажите, что прямая  $\frac{\cos(\varphi-\delta)}{R}$  является асимптотой кривой  $\xi(\varphi)$ .

Для луча проходящего у края солнечного диска имеем:

$$2\delta_{(\odot)} \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \approx 1,75''. \quad (172)$$

## 24 Гравитационное красное смещение

Из точки  $(\cdot)m_{(1)}$ , находящейся на расстоянии  $r = x^1 = r_{(1)}$  от центра сферически симметричного распределения масс, в момент времени  $(\cdot)x_{(1)}^0$  испускается луч по координатной прямой  $r$  в сторону больших  $r$ . В точке  $(\cdot)m_{(2)}$  на расстоянии  $r_{(2)}$  от центра системы в момент времени  $(\cdot)x_{(2)}^0$  он регистрируется. При сравнении результатов измерений в точках  $(\cdot)m_{(1)}$  и  $(\cdot)m_{(2)}$  отношение частот можно выразить через  $M$ ,  $r_{(1)}$  и  $r_{(2)}$

$$\frac{\nu_{(2)}}{\nu_{(1)}} = 1 + M \left( \frac{r_{(1)} - r_{(2)}}{r_{(2)}r_{(1)}} \right) = 1 + M \frac{\delta r}{r_{(2)}r_{(1)}}. \quad (173)$$

Поскольку  $r_{(1)} < r_{(2)}$ , т.е.  $\delta r < 0$  частота регистрируемого сигнала будет меньше исходной. **Происходит гравитационное красное смещение:**

$$\nu_{(2)} < \nu_{(1)}.$$

## 25 Гравитационные волны

### 25.1 ТПВТ в линейном приближении

В линейном приближении деформация пространства представляется как аддитивная поправка к метрике Минковского

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu},$$

причем величины  $\gamma_{\mu\nu}$ ,  $\gamma_{\mu\nu,\xi}$  и  $\gamma_{\mu\nu,\xi,\rho}$  считаются малыми. Такое приближение использовалось при построении ньютоновского предела. Оно носит название линеаризованной теории тяготения.

Введем стандартную свертку

$$\gamma \equiv \gamma_{\nu\alpha} \eta^{\nu\alpha},$$

тензорное поле

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \gamma. \quad (174)$$

**Упражнение 10** *Покажите, что в терминах поля  $h_{\mu\nu}$  уравнения Эйнштейна принимают вид*

$$\square h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha,\beta} - h_{\mu}{}^{\beta}{}_{,\beta,\nu} - h_{\nu}{}^{\beta}{}_{,\beta,\mu} = -16\pi T_{\mu\nu} \quad (175)$$

Эти уравнения носят название **основных уравнений линеаризованной теории гравитации**.

**Определение 30** *Преобразование  $x'^{\mu}((\cdot)t) = x^{\mu}((\cdot)t) + \xi^{\mu}((\cdot)t)$  носит название инфинитезимального **калибровочного преобразования**.*

Калибровочное преобразование есть преобразование симметрии (в рамках линеаризованной модели ТПВТ).

Выберем поле  $\xi$  так, чтобы в новой системе координат дивергенция тензора  $h'_{\mu\nu}$  равнялась нулю,

$$h'_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0; \quad (176)$$

**Определение 31** *Калибровка, в которой справедливо равенство  $h_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$ , называется **лоренцевой**.*

В лоренцевой калибровке основные уравнения линеаризованной модели ТПВТ принимают вид

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (177)$$

$$h_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0. \quad (178)$$

## 25.2 Общее волновое решение

Решения основных уравнений ищутся в виде разложения по плоским волнам:

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} \left( A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \right), \quad (179)$$

где постоянный тензор  $A_{\mu\nu}$  – тензор поляризации и постоянный вектор  $k_\alpha$  – волновой вектор. Условия существования решения:

$$k^\mu k_\mu = 0, \quad (180)$$

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0; \quad (A \perp k). \quad (181)$$

## 25.3 Калибровочные условия.

### Выделение поля с фиксированным спином

Предполагается, что поле метрического тензора описывает безмассовую частицу со спином 2. Тогда поляризация  $A_{\mu\nu}$  имеет лишь две независимые компоненты (два собственных состояния оператора спиральности). Можно выбрать векторное поле  $u$ , независимое от  $k$ , и наложить условие поперечности

$$A_{\mu\nu} u^\nu = 0. \quad (182)$$

Необходимо еще одно условие, которое удобно выбрать в виде условия обращения в нуль свертки,

$$A_\mu{}^\mu = 0. \quad (183)$$

**Определение 32** Калибровка вида

$$A_{\mu\nu} k^\nu = A_{\mu\nu} u^\nu = A_\mu{}^\mu = 0 \quad (184)$$

называется *поперечной, бесследовой*.

В терминах  $h_{\mu\nu}$  полный набор условий для поперечной бесследовой калибровки гравитационного поля имеет следующий вид ( $k, j = 1, 2, 3$ ):

$$\left. \begin{aligned} h_{\mu 0} &= 0 \\ h_{kj}{}^j &= 0 \\ h_k{}^k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

## 25.4 Волновое решение в поперечной бесследовой калибровке

Положим волновой вектор равным  $k^\nu = (1, 0, 0, 1)$ . Тогда

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} (x^0 - x^3) \quad (186)$$

и обращаются в нуль все компоненты кроме  $h_{11}, h_{22}, h_{12} = h_{21}$ , причем

$$h_1{}^1 + h_2{}^2 = 0 \implies h_{11} = -h_{22}. \quad (187)$$

## 25.5 Тензор кривизны в поле гравитационной волны

Нетривиальные компоненты тензора Римана выражаются через две независимые компоненты возмущения  $h$  и, в частности для  $i, k = 1, 2$  справедливо соотношение

$$R_{i0k0} = -\frac{1}{2}h_{ik,0,0}. \quad (188)$$

## 25.6 Массивные тела в поле гравитационной волны

Рассмотрим пару массивных тел,  $A$  и  $B$ , соединенных кривой с пространственно подобной касательной, и построим систему геодезически параллельных поверхностей, одна из которых содержит точки  $A$  и  $B$ . Для точки  $(\cdot)$   $A$  построим локально лоренцеву систему координат, сопутствующую телу  $A$ . Введем полугеодезическую систему координат для точки  $A$ . Используем уравнения для относительного ускорения геодезических кривых,

$$\nabla_v \nabla_v n = -R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho v^\mu n^\nu v^\lambda e_\rho. \quad (189)$$

Пусть частица  $B$  покоится относительно  $A$  до прихода волны, тогда из уравнения колебаний разделяющего вектора следует,

$$n_i(t) = n_i(0) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( A_{ij} e^{+ik_\alpha x^\alpha} \right) n^j(0) + \mathcal{O}(h_{ij}^2). \quad (190)$$

## 25.7 Форма вынужденных колебаний в поле гравитационной волны

Колебания разделяющего вектора поперечны. Можно выделить две поляризации гравитационного излучения:

$$A_{11} \equiv A_+ \quad (191)$$

$$A_{12} \equiv A_\times \quad (192)$$

и разложить возмущения  $h(t)$  по базисным тензорам

$$e_+ \equiv e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2, \quad (193)$$

$$e_\times \equiv e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1. \quad (194)$$

Для поляризации  $A_+$  получим

$$n_1(t) = n_1(0) + \frac{1}{2} A_+ \cos(x^0 - x^3) n_1(0) \quad (195)$$

$$n_2(t) = n_2(0) - \frac{1}{2} A_+ \cos(x^0 - x^3) n_2(0) \quad (196)$$

Механизм колебаний под действием волны с поляризацией  $e_\times$  тот же. Отличие состоит в том, что оси колебаний с максимальной амплитудой смещены относительно базисных осей на  $\frac{\pi}{4}$ .

## 26 Расстояния во Вселенной.

**Определение 33** Парсек – расстояние до объекта, годичный параллакс которого равен  $1''$ .

$$1pc = 3 \cdot 10^{18} cm$$

**Радиус Вселенной**, часто используемый в качественных расчетах в космологии, есть величина во многом формальная. Она определяется как произведение скорости света на **время жизни Вселенной** (последнее в свою очередь задается как величина обратная **константе Хаббла**).

$$\mathcal{R} = 4 \cdot 10^{10} pc = 4 \cdot 10^4 Mpc = 1.2 \cdot 10^{28} cm$$

$$1Mpc = 10^6 pc$$

Во Вселенной можно насчитать  $\approx 10^9$  галактик.

Диаметр нашей галактики, **Млечного пути**, составляет

$$30kpc = 3 \cdot 10^4 pc.$$

В Млечном пути насчитывается около  $10^{11}$  звезд.

В **Местную систему** включается 16 галактик, её диаметр равен

$$0.4Mpc = 4 \cdot 10^5 pc.$$

Типичное **скопление** содержит более ста галактик, его диаметр – несколько мегапарсек.

**Кластер** содержит около тысячи галактик, его линейные размеры  $5 \div 7Mpc$ .

**Суперкластер** – несколько тысяч галактик, его линейные размеры  $10 \div 100Mpc$ .

Начиная с масштаба в  $10^9 pc$  Вселенная чрезвычайно изотропна и однородна.

Если галактика  $a$  имеет светимость  $\mathcal{L}_{(a)}$ , то её видимая яркость для наблюдателя (например на Земле) будет  $\mathcal{S}_a = \frac{\mathcal{L}_{(a)}}{4\pi l_{(a)}^2}$ . В свою очередь,  $l_a^3 \sim \mathcal{S}_a^{-\frac{3}{2}}$ .

Для объектов фиксированной светимости  $\mathcal{L} = const$  расстояние от наблюдателя определяется яркостью. Для них вводится понятие яркостного расстояния:

$$l = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{4\pi\mathcal{S}}}. \quad (197)$$

## 26.1 Сефеиды

Расстояния не превышающие  $30 \div 40pc$  определяются по годичному параллаксу объекта.

Для больших расстояний используются сефеиды и другие объекты со сходными свойствами (например, эллиптические галактики).

**Определение 34** *Сефеиды – звезды-супергиганты переменной светимости с периодом от 2-х до 150-и дней. Амплитуда их светимости прямо пропорциональна периоду.*

В целом система стандартных объектов позволяет выстроить ”лестницу” масштабов для определения расстояний объектов, находящихся на границе возможностей наблюдательной астрономии.

## 27 Уравнения Фридмана и космологические модели

### 27.1 Уравнения Фридмана

Поскольку в однородной и изотропной Вселенной выделенные пространственные направления отсутствуют, компоненты  $g_{0i}$  метрического тензора должны обратиться в нуль. Устраняя перевыбором координаты  $x^0$  множитель перед  $(dx^0)^2$  приведем интервал  $ds^2$  к виду

$$ds^2 = (dx^0)^2 - b^2(x^0) d\vec{r}^2 \quad (198)$$

Известно три гладких однородных и изотропных многообразия:  $S^3$ ,  $R^3$  и трехмерный гиперболоид.

И вещество, и излучение описываются идеализированной ”космологической жидкостью” с

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} p, \quad (199)$$

характеризуемой скоростью  $u = 1, 0, 0, 0$  плотностью  $\rho$  и давлением  $p$ . В силу однородности  $\rho$  и  $p$  зависят только от  $x^0$ . Уравнения Эйнштейна (с космологическим членом)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda; \quad (200)$$

приводят к **уравнениям Фридмана**

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\varsigma}{b^2} = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (201)$$

$$\frac{2\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{\varsigma}{b^2} = -8\pi p + \Lambda, \quad (202)$$

где  $\varsigma = 1, 0, -1$  в зависимости от типа гладкого однородного и изотропного многообразия.

## 27.2 Закон Хаббла

Для плоской Вселенной с  $\zeta = 0$ :

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (203)$$

Введем константу Хаббла:

$$H^2(t) = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (204)$$

Из уравнения Фридмана для плоской Вселенной следует закон Хаббла,

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) = H(t). \quad (205)$$

Уравнение Фридмана позволяет ввести понятия **полной** и **критической плотностей**  $\rho_{critical}$

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\zeta}{b^2} = \frac{8\pi}{3}\rho_{total}(t) - \frac{\zeta}{b^2} = \frac{8\pi}{3}\rho_{critical}; \quad (206)$$

Обычно оперируют с относительными величинами (для каждой из плотностей):

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (207)$$

## 27.3 Красное смещение и фактор ”замедления”

Введем параметр

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu}, \quad (208)$$

где  $\lambda_0$  и  $\nu_0$  – длина волны и частота излучения в сопутствующей локально-лоренцевой системе координат. Рассмотрим эффект Доплера при удалении источника от наблюдателя (”разбегание” объектов Вселенной):

$$\frac{\nu}{\nu_0} \approx 1 - \beta \quad (209)$$

Из этого соотношения следует, что

$$z \approx \beta. \quad (210)$$

Энергия фотона, движущегося радиально, обратно пропорциональна масштабному фактору  $b(x^0)$ :

$$\nu = p^0 = \frac{1}{b_0}. \quad (211)$$

Это позволяет выразить красное смещение через отношение масштабных факторов: в момент поглощения,  $b_0$ , и в момент излучения,  $b_e$ ,

$$1 + z = \frac{b_0}{b_e}. \quad (212)$$

Фактор замедления –

$$q = - \left[ 1 + \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt} \right]. \quad (213)$$

Он определяется полной плотностью и константой Хаббла:

$$q = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho}{H^2}. \quad (214)$$

Произведение  $l$  (см. (197)) на  $H_0$  зависит только от параметра замедления:

$$H_0 \cdot l = H_0 b_0 r_0 (1 + z) = (t) + \frac{1}{2} z^2 (t) (1 - q_0) + \dots, \quad (215)$$

который можно вычислить, используя только наблюдаемые непосредственно величины:

$$q_0 = 1 - 2 \frac{H_0 \cdot l}{z^2 (t)} + 2 \frac{1}{z (t)}. \quad (216)$$

## 27.4 Темная энергия

В 1998г. Перлмуттер, Шмидт и Рьесс обнаружили, что расстояния до ряда сверхновых звезд с  $z \approx 1$  на 10 - 15 процентов больше, чем их "радиационные расстояния", вычисленные в предположении  $\Omega_{fullmatter} = 0.3$  и  $\Lambda = 0$ . Подставив соответствующие значения в формулу (216), они пришли к выводу об ускоренном расширении Вселенной,  $q_0 < 0$ .

Такое расширение должно обеспечиваться отрицательной плотностью. Одним из наиболее приемлемых вариантов этой **темной энергии** считается космологический член (как характеристика вакуума).

$$\Omega_\Lambda \approx 0.73 \quad (0.65 \div 0.80), \quad (217)$$

$$\Omega_{matter} = (0.26 \div 0.30). \quad (218)$$

$$\Omega_\Lambda + \Omega_{matter} \approx 1. \quad (219)$$

## 27.5 Темная материя

Если распределение масс внутри галактик сферически симметрично или подобно эллипсоиду, то классическая механика предсказывает зависимость орбитальной скорости от радиуса:

$$v^2 \cdot r = M(r). \quad (220)$$

У края галактики (вне её) получим

$$v^2 \sim \frac{M(\text{total})}{r}. \quad (221)$$

Измерения показывают, что на достаточно больших расстояниях от края сохраняется свойство

$$v^2 \sim \text{const}. \quad (222)$$

Последнее должно означать, что вне видимого края галактик существует "гало" неизлучающей **темной материи**. Поскольку невидимая материя должна давать вклад порядка  $r$ , то её плотность должна вести себя как

$$\rho_{d.m} \sim \frac{1}{r^2}. \quad (223)$$

В настоящее время надежными считаются следующие оценки:

$$\Omega_{matter0} = 0.05 \div 0.07, \quad \Omega_{matterfull} = 0.26 \div 0.35, \quad \Omega_{\Lambda} = 0.6 \div 0.8, \quad (224)$$

причем

$$\Omega_{total} = 1.00 \div 1.11. \quad (225)$$

## 27.6 Возраст Вселенной

Переписав закон Хаббла в виде

$$\frac{L}{\beta} = H_0^{-1}, \quad (226)$$

получим время, в течении которого источники излучения удалялись друг от друга (в линейном приближении). Это время называется **возрастом Вселенной**. По современным данным

$$H_0 = 70 \pm 7 \frac{km}{sec \cdot MPc},$$

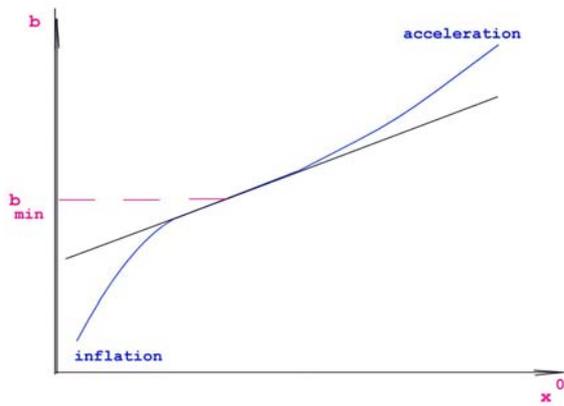
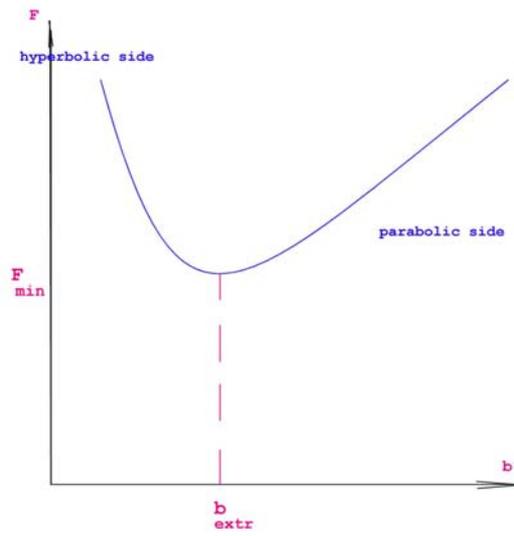
$$T_0 = 14 \pm 2 Gyr,$$

## 27.7 Сценарии развития Вселенной

Считаем, что в процессе развития Вселенной количество всех видов материи постоянно:  $b^3 \rho_{matter} = C$ , тогда уравнения Фридмана для  $\zeta = 0$ ,  $p_{matter} = 0$  и  $\Lambda > 0$ :

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 = \frac{8\pi C}{3b^3} + \frac{\Lambda}{3}; \quad (227)$$

$$\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 = \frac{8\pi C}{3b} + \frac{\Lambda}{3}b^2 \equiv F(b); \quad (228)$$



Зависимости  $F(b)$  и  $b(x^0)$ . Функция  $F(b)$  имеет смысл квадрата скорости расширения. Поскольку сейчас  $\dot{b} > 0$ , функция непрерывна и  $F(b) \neq 0$ , то  $\dot{b} > 0$  везде,

## 27.8 Большой взрыв

Фазы большого взрыва:

1. Планковская фаза.  $10^{-43} \text{ sec} \approx \sqrt{\hbar G/c^5}$ . Доминируют гравитоны. Нет оснований описывать пространство-время без учета квантовых эффектов. Фаза квантовой гравитации.

2. Адронная эра.  $10^{-43} \text{ sec} \div 10^{-4} \text{ sec}$   $10^{31} \text{ K} \div 10^{12} \text{ K}$

Плазма: кварки, глюоны, нуклоны, электроны, мюоны, тау, фотоны, гравитоны, нейтрино. Идут реакции типа  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ . Небольшое превышение барионов над антибарионами. При  $10^{12} \text{ K}$  – конец аннигиляции. В районе  $10^{-6} \text{ sec}$ , при температурах  $10^{13} \text{ K} - 10^{12} \text{ K}$ , кварки комбинируются в нуклоны (конец эры свободных кварков).

3. Лептонная эра.  $10^{-4} \text{ sec} \div 10 \text{ sec}$   $10^{12} \text{ K} \div 10^{10} \text{ K}$  В результате аннигиляции и образования составных частиц число частиц сильно уменьшилось. В результате чего плотность лептонов превалирует. Обилие нейтрино и антинейтрино, электроны, мюоны, тау, и их античастицы; фотоны, гравитоны, нейтроны и протоны.

4. Радиационная эра.  $10 \text{ sec} \div 10^{12} \text{ sec}$   $10^{10} \text{ K} \div 10^4 \text{ K}$

Электроны и позитроны аннигилировали; остались лишь те электроны, которые компенсировали избыток протонов над антипротонами! Превалирует излучение в виде нейтринного и электромагнитного. При  $T = 10^9$  идет реакция образования гелия  $n + p \rightarrow d + \gamma \Rightarrow He$ .

5. Наша эра, эра материи.  $t > 10^{12} \text{ sec}$   $T < 10^4 \text{ K}$

При температуре  $T \approx 3000$  образовались атомы (нейтральные). Плотность материи превысила плотность излучения. Следовательно, излучение и материя отделились окончательно, силы взаимодействий резко снизились. Излучение, существовавшее в тот момент, оказалось в "прозрачной" Вселенной и далее существовало практически независимо от материи. Оно свидетельствует сейчас (в виде реликтового фона) о высокой степени однородности и изотропности Вселенной, сформировавшейся к концу радиационной эры.

Гравитационные силы начинают работать на сближение атомов и формирование их скоплений.

$10^{16} \text{ sec}$  – формируются галактики.  $10^{17} \text{ sec}$  – возникла солнечная система.



\*\*\*\*\*